

Patrícia Coquelet Pinto Mourão

**CONTROLO ACTIVO DE VIBRAÇÕES
EM ESTRUTURAS FLEXÍVEIS**

Lisboa

2010

CONTROLO ACTIVO DE VIBRAÇÕES EM ESTRUTURAS FLEXÍVEIS

Patrícia Coquelet Pinto Mourão

(Licenciada em Ciências de Engenharia Civil)

Dissertação apresentada na Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil na especialidade de Estruturas e Geotecnia

Orientador: Doutora Ildi Cismasiu
Co-Orientador: Doutor Corneliu Cismasiu

Júri

Presidente: Doutor João Rocha de Almeida
Vogais: Doutor Manuel Américo Gonçalves da Silva
Doutora Ildi Cismasiu
Doutor Corneliu Cismasiu

Março de 2010

Agradecimentos

Embora uma dissertação seja um trabalho individual, existem diversas pessoas envolvidas, de uma forma directa ou indirecta, sem as quais este estudo não teria sido possível.

Por essa razão, desejo expressar os meus sinceros agradecimentos:

À professora Ildi Cismasiu, pela orientação, disponibilidade e paciência que me dedicou ao longo deste trabalho.

Ao professor Corneliu Cismasiu que, apesar de considerado por muitos alunos como uma pessoa demasiado rígida e inflexível, foi um pilar na minha aprendizagem ao longo destes anos de curso, sabendo transmitir de forma clara e objectiva os seus conhecimentos.

Um especial agradecimento aos meus pais e irmã, pela enorme compreensão, amor e carinho que sempre me deram e, acima de tudo, por estarem SEMPRE ao meu lado.

Um obrigada muito especial ao Hélder, pela enorme ajuda, paciência, apoio incondicional e ânimo que me transmitiu nas alturas em que sentia as forças fraquejarem.

Aos meus amigos e colegas, pelo apoio e motivação que sempre me dedicaram.

Resumo

Quase todas as estruturas de Engenharia Civil estão sujeitas, em algum período da sua vida útil, a acções dinâmicas como, por exemplo, o movimento do solo onde estão implantadas, a força do vento, movimentação de pessoas no seu interior ou até mesmo máquinas em funcionamento. Os edifícios e obras de arte, quando sujeitos a vibrações que ultrapassem os limites aceitáveis podem, numa primeira fase, colocar em causa o conforto dos utilizadores e, em casos extremos, a segurança de pessoas e bens. A necessidade de atenuar as consequências que advêm dessas vibrações tem levado a uma intensificação de esforços visando o encontro de soluções para esta problemática. Estas soluções passam pelo desenvolvimento de regulamentos preventivos por parte das entidades responsáveis, fundamentados no contínuo acumular de conhecimentos das causas e impactos das vibrações nas estruturas, ou o aperfeiçoar de técnicas, ferramentas e sistemas que contrariem os seus efeitos nocivos.

Os sistemas de controlo surgem como complemento das medidas preventivas de segurança impostas pelos regulamentos, alargando as possibilidades na concepção de estruturas em Engenharia Civil. A sua implementação reveste-se de extrema importância tendo em conta que permite atenuar as vibrações a que estão sujeitas melhorando, assim, o seu comportamento dinâmico e assegurando o seu bom funcionamento.

Neste trabalho serão abordados, de forma sucinta, os diferentes tipos de sistemas de controlo. Na componente prática serão analisados os passos para implementação de um sistema de controlo activo em estruturas flexíveis, recorrendo a um Regulador Linear Quadrático. A influência dos diferentes tipos de parâmetros envolvidos neste tipo de controlador sobre a estrutura onde é aplicado será objecto de estudo através de simulações implementadas em MATLAB.

Abstract

Almost every Civil Engineering structure will most likely suffer from the effects of dynamic actions in their life cycle, such as the movement of the soil they're founded in, the wind, earthquakes or even people moving and working machinery.

Buildings and bridges when subjected to vibration may, in early stages, provoke some disturbance in the comfort of their users. In more extreme situations, when vibration reaches beyond the acceptable limits of the structure, the safety of people and values will be at risk. The need to attenuate the consequences of structure vibration is leading to effort intensification in order to find solutions to the problem. These solutions may come from the development of preventive regulations by the responsible entities, based on the continuous accumulation of knowledge about the causes and impacts of vibration in structures and/or from learning and implementation perfect of techniques, tools and systems that oppose to their harmful effects.

Control systems appear as an extension of preventive safety measurements imposed by regulations, widening the possibilities in the conception of Civil Engineering structures. The implementation of control systems coats itself of extreme importance if considering that its action allows the attenuation of the effects of the acting vibrations in the structure, improving thus, the overall dynamic behavior of the structure and assuring its good working condition.

This work will make approach to different kinds of control systems. In the practical component of the work there will be made an approach to the different steps in the implementation of active control systems on flexible structures making use of a Linear Quadratic Regulator (LQR). The influence of the different parameters involved in this kind of controller over the structure it is applied to, will be subject of study trough simulations implemented in MATLAB.

Índice Geral

| | |
|--------------------------------|-----|
| <i>Agradecimentos</i> | i |
| <i>Resumo</i> | iii |
| <i>Abstract</i> | v |
| <i>Índice Geral</i> | vii |
| <i>Índice de Figuras</i> | xi |

Capítulo 1 - Introdução.....1

| | |
|---|----|
| 1.1. A Problemática das Vibrações em Estruturas | 1 |
| 1.2. Utilização de Sistemas de Controlo em Edifícios Reais..... | 5 |
| 1.3. Objectivos do Trabalho..... | 12 |
| 1.4. Organização do Trabalho..... | 13 |

Capítulo 2 - Representação de Sistemas Dinâmicos15

| | |
|--|----|
| 2.1. Equações do Movimento | 15 |
| 2.2. Espaço de Estado | 16 |
| 2.2.1. Solução da Equação de Espaço de Estado | 20 |
| 2.3. Equações de Entrada-Saída..... | 21 |
| 2.4. Funções de Transferência | 22 |
| 2.4.1. Definição de Transformada de Laplace | 23 |
| 2.4.2. Transformada Inversa de Laplace | 23 |
| 2.5. Equivalência entre Representação de Sistemas..... | 24 |

| | |
|---|----|
| 2.5.1. Conversão de Espaço de Estado para Funções de Transferência..... | 24 |
|---|----|

| | |
|---|----|
| 2.5.2. Conversão de Funções de Transferência para Espaço de Estado..... | 25 |
|---|----|

| | |
|--|-----------|
| Capítulo 3 - Modelação e Análise de Sistemas de Controlo..... | 31 |
|--|-----------|

| | |
|------------------------------|----|
| 3.1. Diagrama de Blocos..... | 31 |
|------------------------------|----|

| | |
|-------------------------------------|----|
| 3.2. Controlo em Malha Aberta | 32 |
|-------------------------------------|----|

| | |
|-------------------------------------|----|
| 3.3. Controlo em Malha Fechada..... | 33 |
|-------------------------------------|----|

| | |
|--|----|
| 3.4. Função de Transferência de um Sistema em Malha Fechada..... | 35 |
|--|----|

| | |
|---|-----------|
| Capítulo 4 - Controlo Clássico VS Controlo Moderno | 39 |
|---|-----------|

| | |
|----------------------------------|----|
| 4.2. Controladores Básicos | 39 |
|----------------------------------|----|

| | |
|--------------------------------------|----|
| 4.2.1. Controlador Proporcional..... | 39 |
|--------------------------------------|----|

| | |
|----------------------------------|----|
| 4.2.2. Controlador Integral..... | 41 |
|----------------------------------|----|

| | |
|-------------------------------------|----|
| 4.2.3. Controlador Derivativo | 42 |
|-------------------------------------|----|

| | |
|--|----|
| 4.2.4. Controlador Proporcional-Integral (PI)..... | 44 |
|--|----|

| | |
|--|----|
| 4.2.5. Controlador Proporcional-Derivativo (PD)..... | 45 |
|--|----|

| | |
|---|----|
| 4.2.6. Controlador Proporcional-Integral-Derivativo (PID) | 45 |
|---|----|

| | |
|---|----|
| 4.3. Regulador Linear Quadrático (LQR)..... | 46 |
|---|----|

| | |
|--------------------------------|----|
| 4.3.1. Equação de Riccati..... | 48 |
|--------------------------------|----|

Capítulo 5 - Dimensionamento de Controladores51

| | |
|--|----|
| 5.1. Noção de Controlabilidade | 51 |
| 5.2. Noção de Estabilidade | 52 |
| 5.3. Método do Lugar das Raízes na Análise da Estabilidade | 53 |
| 5.4. Caracterização Qualitativa da Resposta Transitória | 54 |

Capítulo 6 - Implementação de um Sistema de Controlo num Modelo**Laboratorial.....57**

| | |
|--|----|
| 6.1. Equações de Movimento..... | 59 |
| 6.2. Linearização das Equações de Movimento..... | 62 |
| 6.3. Representação em Espaço de Estado | 64 |
| 6.4. Análise do Comportamento do Sistema em Malha Aberta..... | 68 |
| 6.5. Análise da Estabilidade do Sistema | 70 |
| 6.6. Análise da Controlabilidade..... | 71 |
| 6.7. Controlo em Malha Fechada com Realimentação de Estados | 72 |
| 6.7.1. Determinação dos Parâmetros Q e R | 73 |
| 6.8. Análise da Resposta do Sistema Controlado | 75 |
| 6.8.1. Resposta da Estrutura Controlada a uma Acção do Tipo Degrau Unitário..... | 75 |
| 6.8.2. Resposta da Estrutura Controlada a Condições Iniciais..... | 76 |
| 6.8.3. Resposta da Estrutura Controlada a uma Perturbação Arbitrária..... | 77 |
| 6.9. Ajuste dos Parâmetros Q e R | 78 |
| 6.10. Aplicação Experimental..... | 93 |
| 6.10.1. Montagem Experimental..... | 93 |

| | |
|--|----|
| 6.10.2. Resultados Experimentais | 96 |
|--|----|

| | |
|---|------------|
| Capítulo 7 - Considerações Finais..... | 107 |
|---|------------|

| | |
|--|--------|
| ANEXOS | 110 |
| Anexo I - Estimativa da Rigidez da Barra Flexível | I-1 |
| Anexo II - Cálculo das Equações de Estado..... | II-1 |
| Anexo III - Transformadas de Laplace | III-3 |
| Anexo IV - Propriedades da Transformada de Laplace | IV-1 |
| Anexo V - Transformada Inversa de Laplace | V-1 |
| Anexo VI - Funções de Transferência Analíticas | VI-1 |
| Anexo VII - Rotinas em MATLAB..... | VII-1 |
| Anexo VIII - Parâmetros do Sistema | VIII-1 |
| Bibliografia..... | B-1 |

Índice de Figuras

| | | |
|---------------|---|----|
| Figura 1.1 - | Diagrama esquemático de um problema de controlo estrutural activo..... | 3 |
| Figura 1.2 - | (a) Vista do edifício Kyobashi Seiwa [4], (b) AMD instalado no edifício Kyobashi Seiwa [1]..... | 6 |
| Figura 1.3 - | Esquema do sistema de controlo activo instalado no edifício Kyobashi Seiwa [1, 4]..... | 6 |
| Figura 1.4 - | Esquema do sistema de controlo activo instalado no edifício Applause Tower [2] | 7 |
| Figura 1.5 - | Vista geral do edifício Applause Tower [2]..... | 7 |
| Figura 1.6 - | (a) Apoio sobre o heliporto do edifício Applause Tower [3], (b) Actuador sobre o heliporto do edifício Applause Tower [3] | 8 |
| Figura 1.7 - | Vista geral do edifício Kajima Research [5]..... | 9 |
| Figura 1.8 - | Esquema de um mecanismo AVS [1] | 9 |
| Figura 1.9 - | Tipos de variação de rigidez [1]..... | 10 |
| Figura 1.10 - | Esquema de funcionamento do sistema de controlo no edifício Kajima Research [1] | 10 |
| Figura 1.11 - | Hospital da Luz, Lisboa | 11 |
| Figura 1.12 - | Vista de um apoio de alto amortecimento..... | 11 |
| Figura 1.13 - | Ponte pedonal Pedro e Inês, Coimbra, Portugal | 12 |
| Figura 2.1 - | (a) Sistema mecânico de 1 grau de liberdade; (b) Diagrama de corpo livre | 16 |
| Figura 3.1 - | Elemento de um diagrama de bloco..... | 32 |
| Figura 3.2 - | Diagrama de bloco de um sistema em malha aberta..... | 33 |
| Figura 3.3 - | Diagrama de bloco de um sistema em malha fechada | 33 |
| Figura 3.4 - | Diagrama de bloco de um sistema em malha fechada com realimentação negativa..... | 34 |
| Figura 3.5 - | Diagrama de bloco de um sistema em malha fechada com realimentação positiva..... | 34 |

| | | |
|---------------|---|----|
| Figura 3.6 - | Funções de transferência em um sistema em malha fechada..... | 35 |
| Figura 3.7 - | Função de transferência equivalente em um sistema em malha fechada | 36 |
| Figura 4.1 - | Diagrama de bloco para um controlador do tipo proporcional | 41 |
| Figura 4.2 - | Diagrama de bloco para um controlador do tipo integral | 42 |
| Figura 4.3 - | Diagrama de bloco para um controlador do tipo proporcional-integral . | 44 |
| Figura 4.4 - | Diagrama de bloco para um controlador do tipo proporcional-derivativo | 45 |
| Figura 4.5 - | Diagrama de bloco para um controlador do tipo proporcional-integral-derivativo | 46 |
| Figura 5.1 - | Diagrama de blocos de um sistema em malha fechada SISO (single-input, single output) | 53 |
| Figura 5.2 - | Curva de resposta de um sistema para uma acção do tipo degrau unitário | 54 |
| Figura 6.1 - | “Smart Structure” | 57 |
| Figura 6.2 - | (a) “Smart Struture”, (b) Esquema “Smart Structure” | 59 |
| Figura 6.3 - | Diagrama de corpo livre..... | 60 |
| Figura 6.4 - | Função degrau unitário | 63 |
| Figura 6.5 - | Resposta dos modelos linear e não linear para uma acção tipo degrau .. | 63 |
| Figura 6.6 - | Representação dos pólos e zeros para o sistema em malha aberta | 70 |
| Figura 6.7 - | Representação dos pólos e zeros, próximos da origem, para o sistema em malha aberta | 71 |
| Figura 6.8 - | Controlador com realimentação total dos estados (sem perturbação e sem sinal de controlo)..... | 72 |
| Figura 6.9 - | Comparação dos pólos para o sistema controlado e não controlado (1). 74 | |
| Figura 6.10 - | Comparação dos pólos para o sistema controlado e não controlado (2). 74 | |
| Figura 6.11 - | Resposta da estrutura controlada para uma acção do tipo degrau unitário | 75 |
| Figura 6.12 - | Comparação da resposta do sistema controlado e não controlado para uma acção do tipo degrau | 76 |
| Figura 6.13 - | Resposta da estrutura controlada para condições iniciais | 77 |

| | |
|--|----|
| Figura 6.14 - Perturbação | 77 |
| Figura 6.15 - Resposta da estrutura a uma perturbação externa | 78 |
| Figura 6.16 - Variação do tempo de assentamento com a variação de $Q(1,1)$ | 79 |
| Figura 6.17 - Variação do valor de pico com a variação de $Q(1,1)$ | 80 |
| Figura 6.18 - Variação do esforço máximo de controlo com a variação de $Q(1,1)$ | 80 |
| Figura 6.19 - Variação do tempo de assentamento com a variação de $Q(2,2)$ | 81 |
| Figura 6.20 - Variação do valor de pico com a variação de $Q(2,2)$ | 81 |
| Figura 6.21 - Variação do esforço máximo de controlo com a variação de Q_2 | 82 |
| Figura 6.22 - Variação do tempo de assentamento com a variação de $R(1,1)$ | 83 |
| Figura 6.23 - Variação do valor de pico com a variação de $R(1,1)$ | 83 |
| Figura 6.24 - Variação do esforço máximo de controlo com a variação de $R(1,1)$ | 84 |
| Figura 6.25 - Variação do tempo de assentamento com a variação de $Q(4,4)$ | 85 |
| Figura 6.26 - Variação do esforço máximo de controlo com a variação de $Q(4,4)$ | 85 |
| Figura 6.27 - Sinal degrau unitário | 86 |
| Figura 6.28 - Diagrama de blocos utilizado na simulação em SIMULINK | 87 |
| Figura 6.29 - Resposta do sistema a uma acção do tipo degrau unitário para Q_{orig} e R_{orig} | 87 |
| Figura 6.30 - Resposta do sistema a uma acção do tipo degrau unitário para Q_2 e R_2 | 88 |
| Figura 6.31 - Resposta do sistema a uma acção do tipo degrau unitário para Q_3 e R_3 | 89 |
| Figura 6.32 - Resposta do sistema a uma acção do tipo degrau unitário para Q_4 e R_4 | 90 |
| Figura 6.33 - Resposta do sistema a uma acção do tipo degrau unitário para Q_5 e R_5 | 91 |
| Figura 6.34 - Resposta do sistema a uma acção do tipo degrau unitário para Q_6 e R_6 | 92 |
| Figura 6.35 - (a) Componentes da base do “Smart Structure”, (b) Componentes do topo do “Smart Structure” | 93 |
| Figura 6.36 - Diagrama de blocos | 96 |

| | |
|---|-----|
| Figura 6.37 - Perturbação imposta ao sistema..... | 98 |
| Figura 6.38 - Resposta do sistema para Q_{orig} e R_{orig} medida directamente do equipamento..... | 99 |
| Figura 6.39 - Resposta do sistema para Q_2 e R_2 medida directamente do equipamento..... | 100 |
| Figura 6.40 - Resposta do sistema para Q_3 e R_3 medida directamente do equipamento..... | 101 |
| Figura 6.41 - Resposta do sistema para Q_4 e R_4 medida directamente do equipamento..... | 102 |
| Figura 6.42 - Resposta do sistema para Q_5 e R_5 medida directamente do equipamento..... | 103 |
| Figura 6.43 - Resposta do sistema para Q_6 e R_6 medida directamente do equipamento..... | 104 |

Capítulo 1

Introdução

1.1. A PROBLEMÁTICA DAS VIBRAÇÕES EM ESTRUTURAS

Desde há muitos anos que o problema de vibrações excessivas em estruturas é motivo de preocupação por parte da comunidade científica. O estudo de técnicas de controlo tem vindo a ser fortemente desenvolvido no último século, com vista a minimizar os danos causados por solicitações externas, que estão fora do controlo humano, tais como vibrações resultantes de sismos ou ventos. Estas forças, ao actuarem na estrutura, podem alterar o seu comportamento bem como colocar em causa a segurança e o conforto dos seus ocupantes.

Existem, actualmente, diversos regulamentos que estabelecem critérios de avaliação das vibrações em estruturas consoante o fim a que se destinam. Quando o que está em causa são acções exteriores demasiado severas (acção sísmica e alguns casos da acção do vento) essas normas são estabelecidas de acordo com o estado limite último de resistência das estruturas. No entanto, consideram-se ainda as vibrações causadas por acções exteriores de menor intensidade que podem dar origem a fendilhação dos elementos estruturais e não estruturais, tais como o tráfego intenso, explosões mineiras nas proximidades ou máquinas em funcionamento em obras que estejam a decorrer. Neste caso, as normas estabelecem níveis máximos de vibração em construções a fim de limitar os possíveis danos causados.

Outro ponto importante abrangido pelos regulamentos refere-se aos níveis máximos de vibração de modo a garantir o conforto humano e boas condições de serviço. São

valores de referência, por vezes subjectivos, que quando ultrapassados podem afectar negativamente os seus ocupantes.

Existe uma grande variedade de meios através dos quais essas vibrações podem ser atenuadas, tais como: modificação da rigidez, massa, amortecimento ou forma da estrutura, ou por aplicação de sistemas de controlo.

Actualmente, podemos dividir o controlo estrutural em dois grandes grupos: controlo activo e controlo passivo.

Entende-se por controlo activo aquele que actua com base em dados obtidos, em tempo real, do comportamento da estrutura, através de sensores físicos (ópticos, mecânicos, eléctricos, químicos, etc.), ajustando a acção de controlo consoante as necessidades. Para tal necessita sempre de uma fonte de energia externa que irá permitir a aplicação de forças controláveis através de dispositivos direccionados para esse efeito. Essas forças podem ser usadas para adicionar ou dissipar energia [6]. O objectivo deste tipo de controlo é transferir a energia de vibração da estrutura para um oscilador auxiliar reduzindo, assim, o movimento do edifício, aumentando o seu amortecimento e evitando que a estrutura entre em ressonância. É um sistema com eficiência elevada e indicado, essencialmente, no controlo de vibrações causadas por ventos fortes ou sismos moderados. Contudo, tem como desvantagens o facto de necessitar uma quantidade elevada de energia para manter os actuadores em funcionamento, e estes cessarem quando esta falha. Estes dispositivos podem ser analógicos, gerando um sinal de controlo contínuo no tempo, ou digitais, gerando um sinal de controlo discreto. Actualmente, os digitais são os mais utilizados devido ao seu custo mais acessível e a sua melhor capacidade de memória e precisão. Os actuadores actuam com base num algoritmo previamente estabelecido, com capacidade de estimar a resposta dinâmica do sistema [3, 6].

A Figura 1.1 ilustra, de um modo esquemático, o funcionamento de um sistema de controlo activo.

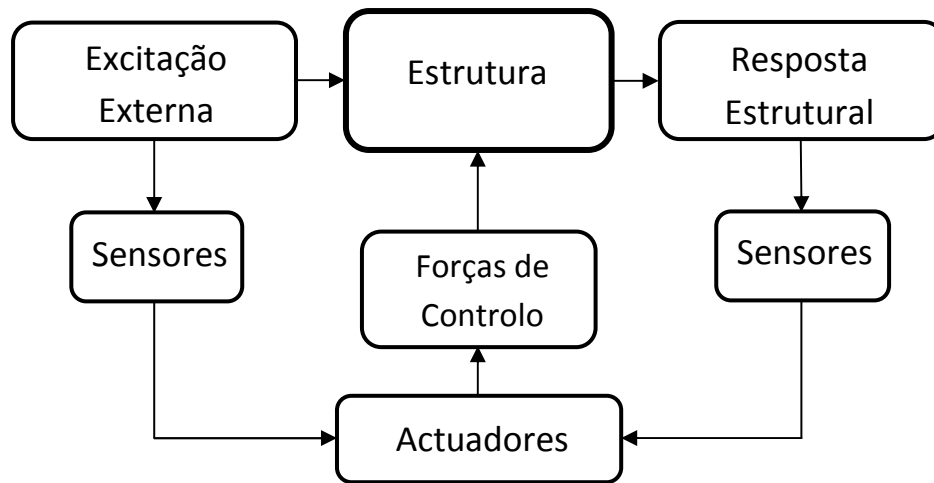


Figura 1.1 - Diagrama esquemático de um problema de controlo estrutural activo

Este tipo de controlo pode ser materializado através de amortecedores de massa activa, (“active mass dampers” – AMD), desenvolvidos no fim do ano de 1980, cabos activos, diagonais activas ou actuadores piezoeléctricos [7]. O uso de materiais piezoeléctricos no controlo de vibrações em estruturas flexíveis tem sido fortemente estudado nas últimas duas décadas. Estes materiais são bastante adequados para o controlo estrutural de vibrações, na forma de sensores ou actuadores, devido à sua grande capacidade em converter directamente energia eléctrica em energia mecânica, ou vice-versa [8].

Contrariamente, o controlo passivo não necessita de nenhuma fonte externa de energia. Os dispositivos usados neste tipo de controlo dissipam a energia que é desenvolvida quando há movimento da estrutura. É uma técnica mais económica que a anterior porém, apesar da sua fiabilidade elevada, é menos eficiente que os sistemas de controlo activo. Incluídas neste tipo de controlo destacam-se diversas técnicas tais como o uso de amortecedores de massa sintonizada (“tuned mass dampers” – TMD's), amortecedores de líquido sintonizado (“tuned liquid dampers” – TLD's), amortecedores viscosos, viscoelásticos, friccionais ou histeréticos e, ainda, isolamento de base. Este último teve as suas primeiras aplicações em Engenharia Civil nos anos 70. O objectivo é apoiar a estrutura numa base suficientemente flexível que filtre as altas frequências do movimento do solo, diminuindo a frequência própria de vibração da estrutura. Numa

estrutura com este tipo de sistema obtêm-se deslocamentos mais elevados, porém reduz-se bastante a deformação.

O controlo semi-activo é uma solução intermédia entre os dois sistemas mencionados anteriormente. Esta solução combina a eficiência do controlo activo com a fiabilidade do controlo passivo. Tem como vantagem o facto de necessitar uma pequena quantidade de energia para manter o seu funcionamento, sendo por isso uma solução bastante económica. Este tipo de sistema recorre a dispositivos do tipo passivo, como por exemplo amortecedores viscosos, para dissipar a energia transmitida à estrutura, tendo ainda a capacidade de se ajustar consoante a resposta desta. Como exemplo destacam-se os dispositivos de rigidez variável (“active variable stiffness” – AVS) que começaram a ser fortemente utilizados no início da década de 90, amortecedores de orifício variável e amortecedores de atrito variável. Tendo sido este último apenas aplicado em trabalhos laboratoriais [4].

É ainda possível recorrer a outro tipo de sistema de controlo, os sistemas híbridos. A partir da combinação de diversos tipos de controlo, este sistema busca em cada um deles os pontos mais vantajosos combinando os seus efeitos. Normalmente entende-se por sistema híbrido a conjugação de sistemas passivos com activos. Enquadram-se neste grupo os HMD’s (“hybrid mass dampers”).

Para além de todas as soluções mencionadas anteriormente existe uma área específica no controlo estrutural que tem vindo a ser fortemente desenvolvida e estudada devido ao seu grande contributo para a melhoria do desempenho em serviço das estruturas de Engenharia Civil. Esse controlo é feito recorrendo a materiais “inteligentes” como, por exemplo, materiais piezocerâmicos e piezoeléctricos, fluidos magneto-reológicos e dispositivos que utilizam ligas com memória de forma (shape memory alloys – SMA’s) [9].

O uso de metais com memória de forma começou durante os anos 60 com a descoberta das propriedades das ligas Ni-Ti, designadas por Nitinol. As duas propriedades mais importantes do Nitinol são o efeito de memória de forma e a superelasticidade. Estas

são, hoje em dia, utilizadas em diversas áreas tais como a aeronáutica (no fabrico de asas e mangas de junção para aviões), a robótica (para simulação de músculos e tendões humanos), a medicina (para substituição de ossos fracturados, aparelhos de correcção para dentes, fabricação de instrumentação médica), entre outras [10]. Contudo, só muito recentemente estes materiais foram utilizados no ramo da Engenharia Civil. A sua superelasticidade, a elevada ductilidade e a boa resistência à fadiga têm levado à sua procura quando o interesse é o isolamento de vibrações em estruturas relativamente à sua base, devido à sua capacidade de recuperar a forma mesmo depois de severamente deformados. Nestas ligas a deformação recuperável por efeito de memória de forma pode atingir entre 8 a 10%. SMA's podem ser utilizadas como dispositivos de controlo activo ou passivo, consoante englobem ou não simultaneamente uma capacidade sensorial e de actuação, sendo que as suas características mais relevantes residem na capacidade de redução da frequência natural da estrutura e do aumento do seu amortecimento [11, 12].

Muito embora os materiais “inteligentes” tragam melhorias significativas no desempenho das estruturas, existem ainda limitações ao seu uso que terão que ser ultrapassadas a fim de se poder aproveitar em pleno as suas capacidades, como por exemplo, o custo de fabricação relativamente elevado.

1.2. UTILIZAÇÃO DE SISTEMAS DE CONTROLO EM EDIFÍCIOS REAIS

- ***Controlo Activo***

No que diz respeito a aplicações de sistemas de controlo activo o Japão é o país que apresenta maior número de aplicações. O primeiro sistema de controlo de vibrações do tipo activo foi implementado no ano de 1989. Trata-se de AMD's instalados no edifício Kyobashi Seiwa, em Tóquio. Este edifício, com 11 pisos, 33 metros de altura e com uma área por andar de aproximadamente 423 m², é bastante susceptível a vibrações transversais causadas por ventos e sismos, devido à sua elevada esbelteza. O sistema de controlo instalado consiste em dois AMD's localizados na sua cobertura. Um deles,

com 4 ton, foi colocado muito perto do centro de gravidade do edifício de forma a controlar deslocamentos transversais, enquanto que a segunda massa, com 1 ton, foi colocada na parte dianteira da cobertura para controlar vibrações de torção. Os resultados obtidos no controlo foram excelentes, tendo-se conseguido um aumento de 20% de amortecimento no primeiro modo de vibração, enquanto no segundo e terceiro modo esse aumento foi de 5% [13].



Figura 1.2 - (a) Vista do edifício Kyobashi Seiwa [4], (b) AMD instalado no edifício Kyobashi Seiwa [1]

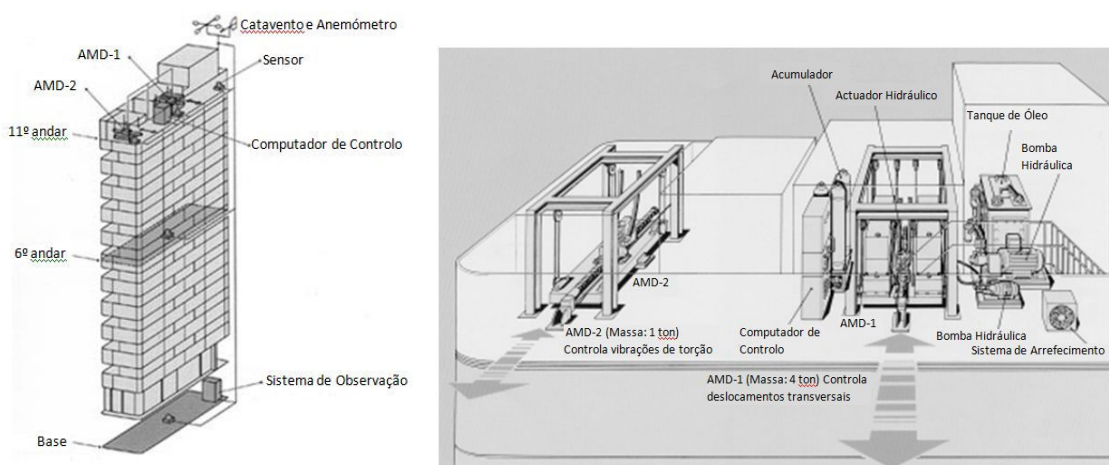


Figura 1.3 - Esquema do sistema de controlo activo instalado no edifício Kyobashi Seiwa [1, 4]

Outro caso bastante conhecido de aplicação de AMD's é o do Applause Tower em Osaka (Japão), concluída em 1992. Trata-se de uma estrutura com 161 metros de altura e 34 andares acima do solo. Para além da sua elevada altura, que a leva a ser bastante susceptível a forças externas, houve também a necessidade de adoptar um sistema eficaz de controlo visando a redução de vibrações e garantindo, assim, elevados níveis de conforto aos ocupantes do luxuoso hotel instalado nos últimos pisos deste edifício. Este foi o primeiro edifício com altura superior a 100 metros a adoptar este tipo de controlo. Neste caso, utilizou-se a massa da plataforma do último piso como massa activa do sistema, [2]. O heliporto é suportado por apoios semelhantes aos utilizados no isolamento de base, sendo activado nas duas direcções ortogonais por quatro actuadores hidráulicos. O heliporto tem um peso de 480 ton, sendo esta a maior massa activa utilizada até hoje em sistemas deste tipo [14].



Figura 1.5 - Vista geral do edifício Applause Tower [2]

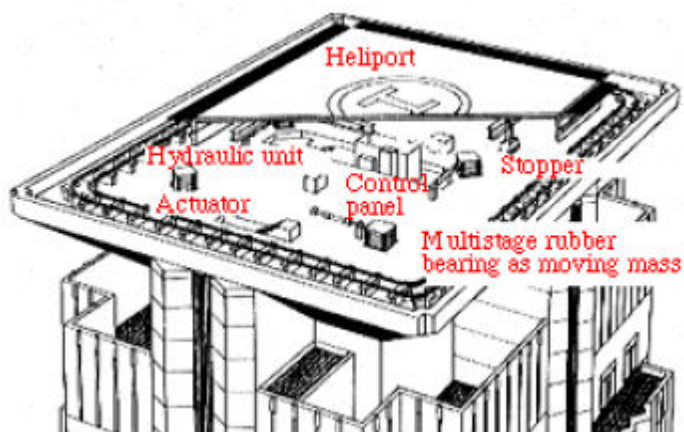


Figura 1.4 - Esquema do sistema de controlo activo instalado no edifício Applause Tower [2]



Figura 1.6 - (a) Apoio sobre o heliporto do edifício Applause Tower [3], (b) Actuador sobre o heliporto do edifício Applause Tower [3]

- ***Controlo Semi-Activo***

Uma aplicação bem conhecida de um sistema semi-activo, composto por diagonais de rigidez variável (AVS), situa-se igualmente em Tóquio (Japão) no edifício Kajima Research Institute, tendo este 12 metros de altura e 3 pisos [1]. Este sistema consiste em dispositivos integrados nas diagonais da estrutura do edifício capazes de proporcionar uma rigidez variável activa e tem como objectivo evitar fenómenos de ressonância. Estes dispositivos são constituídos por cilindros hidráulicos regulados por válvulas que permitem comandar o bloqueio ou desbloqueio das barras mobilizando ou desmobilizando a sua rigidez axial. Neste sistema não existe nenhum actuador, apenas um mecanismo eléctrico que bloqueia ou desbloqueia o dispositivo. Quando não está presente nenhuma excitação do solo estes permanecem travados para dotar a estrutura de rigidez lateral suficiente para resistir à acção do vento. Este sistema é utilizado apenas para vibrações resultantes de sismos e emprega igualmente algoritmos de controlo. Necessita de uma fonte de energia externa, porém em pequena quantidade.



Figura 1.7 - Vista geral do edifício Kajima Research [5]

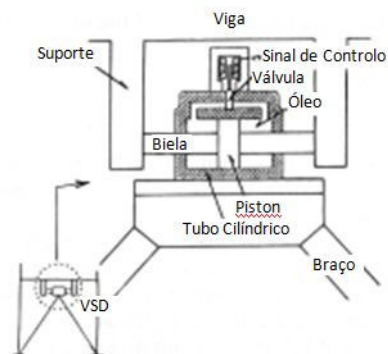


Figura 1.8 - Esquema de um mecanismo AVS [1]

Quando se recorre a este tipo de sistema, normalmente, é utilizado mais do que um dispositivo de rigidez variável. No caso do edifício acima mencionado existem, em cada lado da estrutura e posicionado um em cada piso, três mecanismos em forma de “V” que contêm os AVS’s. Simplificadamente, a estrutura pode funcionar perante três situações, Figura 1.9. No primeiro caso os mecanismos presentes em todos os pisos encontram-se desbloqueados, no segundo caso apenas o mecanismo do primeiro piso está travado e, por fim, o funcionamento com todos os mecanismos a oferecer resistência lateral ao edifício. Um acelerómetro posicionado no primeiro piso recolhe informações quando sujeito a um sismo e, através de um selector de frequências, tem a capacidade de determinar qual dos três estados oferece uma rigidez capaz de assegurar baixos valores de deflexões e acelerações [1, 5].

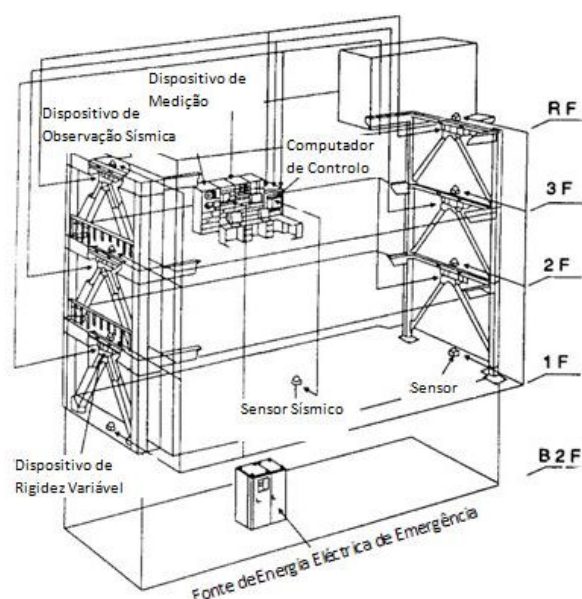


Figura 1.10 - Esquema de funcionamento do sistema de controlo no edifício Kajima Research [1]

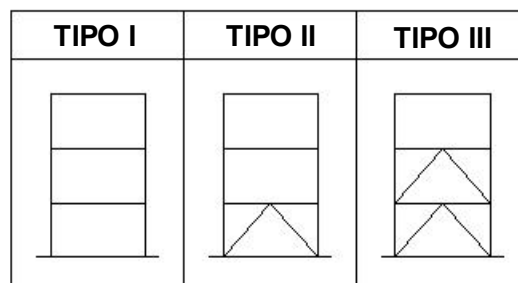


Figura 1.9 - Tipos de variação de rigidez [1]

➤ APLICAÇÕES DE CONTROLO ESTRUTURAL EM PORTUGAL

Em Portugal, um caso bem conhecido de utilização de controlo estrutural passivo é o Hospital da Luz (Lisboa), Figura 1.11, concluído em 2006. Esta foi a primeira estrutura com isolamento de base construída em Portugal.

O terreno onde se encontra implantado este complexo integrado de saúde é atravessado por 2 galerias do metropolitano, o que levou a que o sistema de protecção sísmica adoptado, neste caso, fosse dimensionado de modo a isolar tanto as vibrações sísmicas como também as vibrações verticais induzidas pela passagem das composições do metropolitano [15]. Com base na bibliografia disponível, esta poderá ser a única estrutura no mundo dotada desta particularidade, isolamento de base para acções sísmicas e acções verticais, simultaneamente [16].



Figura 1.11 - Hospital da Luz, Lisboa

Para isolar o edifício destes 2 tipos de acções, sísmicas e verticais, intercalaram-se, nos elementos verticais da estrutura, blocos de borracha de alto amortecimento, Figura 1.12. Os aparelhos de apoio foram colocados acima dos órgãos de fundação e necessitam de inspecção com uma periodicidade máxima de 3 anos, a fim de se garantir boas condições de funcionamento.



Figura 1.12 - Vista de um apoio de alto amortecimento

Contudo, não é só em edifícios que estes sistemas podem ser implementados. Em Portugal, outro caso bastante conhecido de controlo passivo foi utilizado em Coimbra, na ponte pedonal Pedro e Inês, concluída em 2006. A ponte faz a travessia do rio

Mondego e está localizada no centro do Parque da Cidade, tratando-se de uma estrutura metálica com tabuleiro misto aço/betão. Estudos revelaram que a estrutura era particularmente sensível a vibrações induzidas por peões, quer na direcção lateral, quer na vertical. Com a finalidade de diminuir essas vibrações foi implementado um sistema composto por 6 TMD's e desenvolvido um programa de observação do comportamento dinâmico da ponte. O processo de monitorização é complexo, porém encontra-se numa fase estabilizada do seu funcionamento. Os dados recolhidos durante dois meses de observação mostram que a estrutura apresenta um comportamento dentro dos limites aceitáveis [3].



Figura 1.13 - Ponte pedonal Pedro e Inês, Coimbra, Portugal

1.3. OBJECTIVOS DO TRABALHO

O objectivo desta tese é estudar o controlo de vibrações dinâmicas em estruturas flexíveis através da modelação, em MATLAB, do comportamento do sistema não controlado e controlado e através de simulações utilizando o programa SIMULINK. Pretende-se comparar os resultados simulados com os resultados obtidos experimentalmente, com vista a compreender melhor os conceitos relacionados com o

controlo. Em particular, pretende-se estudar o funcionamento de um controlador do tipo LQR, e analisar a influência dos diversos parâmetros na resposta do sistema.

1.4. ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Este trabalho está dividido em 5 partes. A primeira parte é apresentada no capítulo 1, onde é feita uma abordagem à problemática de vibrações estruturais, aos diversos tipos de controlo passíveis de serem aplicados e suas utilizações em estruturas reais. Neste capítulo referem-se, ainda, quais os objectivos propostos.

A segunda parte, apresentada no capítulo 2, aborda a representação de sistemas dinâmicos e as Transformadas de Laplace.

A terceira parte, onde se incluem os capítulos 3, 4 e 5, trata da modelação e análise de sistemas de controlo, da opção entre controlo moderno e controlo clássico e, por fim, o dimensionamento de controladores.

Na quarta parte, capítulo 6, são feitas simulações do comportamento do sistema mediante várias situações, através dos programas MATLAB e SIMULINK e implementa-se um sistema de controlo do tipo LQR num modelo laboratorial. São analisadas as respostas obtidas e faz-se o ajuste dos parâmetros do controlador.

Finalmente, no capítulo 7 descrevem-se as principais conclusões deste trabalho no que respeita à implementação de um sistema de controlo do tipo LQR.

Capítulo 2

Representação de Sistemas Dinâmicos

A fim de se estudar o comportamento dinâmico de uma estrutura é necessário recorrer a modelos matemáticos que o reproduzam com a maior exactidão possível. Estes modelos podem assumir diferentes formas, consoante o tipo de problema e da estrutura em causa, e a opção por um ou outro é feita de modo a facilitar a análise do seu comportamento [17].

Para sistemas lineares é possível optar por um de dois modelos: representação através de Funções de Transferência ou representação em Espaço de Estado. Neste trabalho irá ser usado o modelo Espaço de Estado que permite a representação do sistema por equações diferenciais de 1ª ordem.

2.1. EQUAÇÕES DO MOVIMENTO

É possível representar um sistema dinâmico através de equações de movimento, que descrevem o seu comportamento ao longo do tempo, recorrendo às leis da física. No caso de sistemas mecânicos a dedução dessas equações pode ser feita, por exemplo, recorrendo directamente à 2ª Lei de Newton ou às equações de Lagrange, que derivam das leis de Newton, expressando a mesma teoria, contudo, recorrendo a conceitos matemáticos mais avançados.

Considerando o sistema de 1 grau de liberdade representado na Figura 2.1(a), constituído por um corpo de massa m ligado ao exterior através de uma mola de rigidez

k e por um amortecedor viscoso de constante de amortecimento c , ao qual está aplicada uma força variável no tempo $f(t)$,

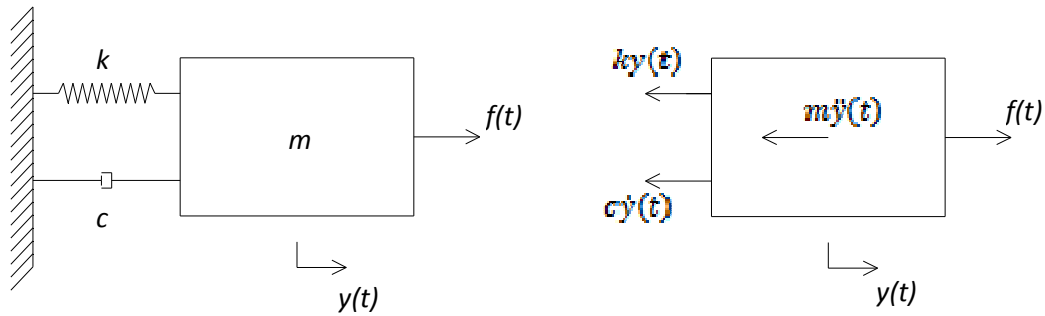


Figura 2.1 - (a) Sistema mecânico de 1 grau de liberdade; (b) Diagrama de corpo livre

A equação de movimento, com base no diagrama de corpo livre da Figura 2.1(b), é a seguinte

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = f(t) \quad (2.1.1)$$

onde $\ddot{y}(t)$, $\dot{y}(t)$ e $y(t)$ representam, respectivamente, a aceleração, a velocidade e o deslocamento do corpo m , $m\ddot{y}(t)$ é a força de inércia, $c\dot{y}(t)$ é a força de amortecimento e $ky(t)$ a força elástica.

2.2. ESPAÇO DE ESTADO

Uma possível forma de caracterizar matematicamente um sistema dinâmico é através da representação Espaço de Estado. O objectivo desta representação é reescrever o sistema de equações do movimento inicial num sistema com um maior número de equações mas de grau inferior. Nesta análise existem 3 tipos de variáveis envolvidas: variáveis de estado, variáveis de entrada e variáveis de saída. Para um dado sistema a representação em Espaço de Estado não é única, contudo, o número de variáveis de estado terá que ser sempre o mesmo, independentemente do modo como é apresentado [17].

No que se segue serão definidos os conceitos básicos presentes numa representação deste tipo.

Definem-se como *variáveis de estado*, o menor número de variáveis independentes capazes de caracterizar completamente o estado de um sistema, ou seja, são as variáveis que bastam para determinar de modo único a mudança de energia interna desse mesmo sistema. Quando os seus valores são conhecidos para o instante inicial $t = t_0$, consegue-se aferir a resposta do sistema em qualquer instante $t \geq t_0$, se forem igualmente conhecidos os valores das entradas no sistema nesse intervalo de tempo.

As variáveis de estado não são, necessariamente, mensuráveis ou observáveis.

Sejam as variáveis de estado x_1, x_2, \dots, x_n , é possível representá-las através de um vector, o vector de estado, $x^T = [x_1, x_2, \dots, x_n]$.

O espaço n -dimensional cujos eixos estão em correspondência com as n variáveis de estado designa-se Espaço de Estado.

O vector que representa as perturbações exteriores aplicadas ao sistema é designado de vector de entrada, $u(t)$, e aquele onde se encontram as variáveis de saída é chamado vector de saída, $y(t)$. Estando estes dois tipos de variáveis relacionadas entre si, e sendo por vezes difícil a medição das variáveis de entrada, será o vector de saída a fornecer informação relativa ao comportamento do sistema.

Num caso geral, uma representação no Espaço de Estado de um sistema com n variáveis de estado, m variáveis de entrada e p variáveis de saída, fica definida através das seguintes equações,

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_m; t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = f_n(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_m; t) \end{cases}$$

Sendo as equações que caracterizam a saída do sistema da forma

$$\begin{cases} y_1(t) = g_1(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_m; t) \\ \vdots \\ y_p(t) = g_p(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_m; t) \end{cases}$$

Quando estas equações dizem respeito a sistemas variáveis no tempo, ou seja, quando f_1, \dots, f_n e g_1, \dots, g_p envolvem a variável tempo explicitamente, estas podem ser expressas numa forma mais compacta,

$$\dot{x}(t) = f(x, u, t) \rightarrow \text{equação de estado}$$

$$y(t) = g(x, u, t) \rightarrow \text{equação de saída}$$

onde

$$x(t) = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{Bmatrix} \quad y(t) = \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{Bmatrix} \quad u(t) = \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{Bmatrix}$$

$$f(x, u, t) = \begin{Bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_m; t) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_m; t) \end{Bmatrix} \quad g(x, u, t) = \begin{Bmatrix} g_1(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_m; t) \\ \vdots \\ g_p(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_m; t) \end{Bmatrix}$$

Se as equações de estado e de saída forem lineares, então estas podem ser simplificadas e apresentam a seguinte forma,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{2.2.1}$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \tag{2.2.2}$$

Nestas equações, A, B, C e D são matrizes de coeficientes constantes e são designadas por matriz de estado, matriz de entrada, matriz de saída, e matriz de transmissão directa, respectivamente. Estas terão que ter as seguintes dimensões,

$$A[n \times n] \quad B[n \times m] \quad C[p \times n] \quad D[p \times m]$$

Se as equações resultantes do sistema em estudo não forem lineares, ou seja, não forem do tipo

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \dots + a_n(x)y = f(x) ,$$

então, para se poder aplicar os métodos disponíveis para estes casos, é necessário verificar a possibilidade da sua linearização.

Partindo do exemplo da Figura 2.1(a), a equação do movimento é dada por

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = f(t)$$

As variáveis de estado de um sistema deste tipo são

$$x_1(t) = y(t)$$

$$x_2(t) = \dot{y}(t)$$

ou seja, a posição e velocidade, que o definem completamente.

Recorrendo à definição de variável de estado e à equação de movimento, tem-se

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{c}{m}x_2(t) - \frac{k}{m}x_1(t) + \frac{1}{m}f(t) \end{cases}$$

Expressando o sistema de equações anterior na forma matricial, vem

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -c/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} f(t)$$

Admitindo que a única variável disponível para medida é a posição, $y(t)$, do sistema

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Logo, as equações de estado e de saída são dadas por

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -c/m \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 0] \quad D = 0$$

2.2.1. Solução da Equação de Espaço de Estado

Dado um sistema representado por

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

a solução geral do sistema no domínio do tempo é [18]

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds \quad (2.2.3)$$

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + \int_0^t Ce^{A(t-s)}Bu(s)ds + Du(t) \quad (2.2.4)$$

para todo $t \geq 0$.

A solução consiste numa parcela da resposta a uma condição inicial e uma parcela da resposta a um sinal de entrada.

A resposta a um sinal de entrada, correspondente aos dois últimos termos da equação (2.2.4), é constituída por dois componentes – a resposta transitória e a resposta do estado estacionário. A resposta transitória ocorre num período de tempo inicial, após a

introdução do sinal de entrada, e a resposta do estado estacionário é uma componente da solução na qual a dependência das condições iniciais desaparece ao longo do tempo, ou seja, reflecte o comportamento do sistema a longo prazo.

2.3. EQUAÇÕES DE ENTRADA-SAÍDA

Outra forma de representar matematicamente um sistema é sob a forma de equações de Entrada-Saída. A partir das equações de movimento do sistema relacionam-se, através de equações diferenciais, as variáveis de entrada e saída e suas derivadas no tempo [19].

A sua forma geral é

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1} \dot{y}(t) + a_n y(t) = b_0 u^{(m)}(t) + b_1 u^{(m-1)}(t) + \dots + b_{m-1} \dot{u}(t) + b_m u(t) \quad (2.3.1)$$

onde $m \leq n$, $u(t)$ é a variável de entrada, $y(t)$ é a variável de saída e a_i ($i = 1, 2, \dots, n$) e b_j ($j = 1, 2, \dots, m$) são, em sistemas lineares, coeficientes constantes.

Muitas vezes, no sistema de equações diferenciais, as variáveis e suas derivadas aparecem simultaneamente na mesma equação diferencial, dificultando a obtenção da equação de Entrada-Saída. Assim, é possível aplicar as propriedades da Transformada de Laplace ao sistema de equações inicial do sistema e transformá-lo em equações algébricas, facilitando a sua manipulação.

Atendendo ao exemplo dado na Figura 2.1(a), a sua equação de Entrada-Saída é a seguinte

$$\ddot{y}(t) + \frac{c}{m} \dot{y}(t) + \frac{k}{m} y(t) = \frac{1}{m} f(t)$$

No caso de um sistema com N graus de liberdade, a determinação da equação Entrada-Saída pressupõe a aplicação da Transformada de Laplace ao sistema de equações global do sistema e posterior manipulação das equações algébricas obtidas.

2.4. FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA

Em teoria de controlo, Funções de Transferência são utilizadas para caracterizar as relações de entrada-saída de componentes ou sistemas que podem ser descritos por equações diferenciais, e são expressas através da relação entre a Transformada de Laplace da equação de saída e a Transformada de Laplace da equação de entrada, admitindo nulas as condições iniciais.

Usando o conceito de Função de Transferência é possível representar a dinâmica de um sistema através de equações algébricas, escritas em termo de uma variável complexa arbitrária, s , sendo apenas aplicável a sistemas de equações diferenciais lineares invariantes no tempo.

Muitas características importantes dos sistemas dinâmicos e de controlo podem ser determinadas a partir da Função de Transferência.

Com base no exemplo da Figura 2.1(a), cuja equação de movimento é a seguinte

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = f(t)$$

a aplicação da Transformada de Laplace a cada um dos termos da respectiva equação de movimento, permite obter

$$ms^2Y(s) + csY(s) + kY(s) = F(s)$$

Colocando $Y(s)$ em evidência

$$[ms^2 + cs + k]Y(s) = F(s)$$

Assim, a Função de Transferência do sistema é dada por

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$$

2.4.1. Definição de Transformada de Laplace

A Transformada de Laplace tem enorme interesse no campo do controlo de sistemas dinâmicos, sendo um método bastante vantajoso na resolução de equações diferenciais. Devido ao facto de possibilitar a transformação de equações diferenciais no domínio do tempo em funções algébricas de uma variável complexa, facilmente manipuláveis e no domínio da frequência, é bastante utilizada na resolução deste tipo de problemas.

Sendo $f(t)$ uma função que está definida para todos os valores positivos de t , a sua Transformada de Laplace é,

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (2.4.1)$$

Onde “s” é uma variável complexa arbitrária, designada variável de Laplace.

Esta Transformada existe se o integral convergir, ou seja, se f for seccionalmente contínua para todo o intervalo finito de $[0, \infty[$ e limitada por uma função do tipo exponencial,

$$|f(t)| \leq M e^{at} \quad (2.4.2)$$

em que a e M são constantes reais.

Recorrendo a este método, a equação diferencial linear será convertida numa equação algébrica em função de uma variável complexa “s” e, seguidamente, resolvida em ordem a essa mesma variável.

2.4.2. Transformada Inversa de Laplace

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} ds \quad (2.4.3)$$

Nesta expressão σ é a abscissa de convergência, uma constante real, que deverá ser maior que as partes reais de todos os valores singulares de $F(s)$.

Utilizando a Transformada Inversa de Laplace é possível expressar a solução final em termos da variável dependente da equação diferencial inicial.

Apesar de ser possível utilizar a expressão (2.4.3) para calcular esta Transformada, este é um método bastante complexo e, por vezes, de difícil resolução. Contudo, existem tabelas com as expressões mais usuais que facilitam este processo.

Muitas vezes, para se poder recorrer a estas tabelas, é necessário que as expressões obtidas para a Transformada de Laplace estejam na forma de fracções parciais. Tal acontece quando a função, cuja Transformada Inversa de Laplace queremos saber, não aparece directamente tabelada. Assim, torna-se também possível tirar partido da propriedade de linearidade da Transformada Inversa de Laplace e determinar separadamente a transformada inversa de funções mais simples (ver Anexo V).

Existem ainda, para além dos que foram aqui citados, outros modos de representação de sistemas dinâmicos, contudo estes não irão ser abordados no presente trabalho.

2.5. EQUIVALÊNCIA ENTRE REPRESENTAÇÃO DE SISTEMAS

2.5.1. Conversão de Espaço de Estado para Funções de Transferência

Partindo de uma representação do sistema em Espaço de Estado, expressões (2.2.1) e (2.2.2),

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

é possível, através de algumas transformações, deduzir as expressões das suas Funções de Transferência, relacionando cada uma delas com um determinado par Entrada-Saída

do sistema, no domínio de Laplace. Estas expressões são obtidas na forma de uma matriz de transferência.

Aplicando a Transformada de Laplace às equações de estado e de saída anteriores, e considerando as condições iniciais do problema nulas, $x(t = 0) = 0$, tem-se

$$sX(s) = AX(s) + BU(s) \quad (2.5.1)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s) \quad (2.5.2)$$

Resolvendo a equação (2.5.1) em ordem a $X(s)$, obtém-se

$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s)$$

Substituindo esta equação em (2.5.2), vem

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}BU(s) + DU(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s) \quad (2.5.3)$$

A matriz $[C(sI - A)^{-1}B + D]$ é a matriz de transferência que nos permite relacionar o vector de saída $Y(s)$ com o vector de entrada $U(s)$.

Para se obter uma Função de Transferência específica, ou um número reduzido de Funções de Transferência, partindo da equação (2.2.2), basta ajustar convenientemente a dimensão das matrizes B , C e D . No caso de se pretender apenas uma única Função de Transferência, $Y(s)$, $U(s)$ e D reduzem-se a escalares, logo a equação (2.2.2) adquire o seguinte aspecto

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (2.5.4)$$

2.5.2. Conversão de Funções de Transferência para Espaço de Estado

Tal como no caso anterior, também é possível converter modelos expressos na forma de Funções de Transferência para Espaço de Estado.

No caso do numerador da Função de Transferência ser uma constante, este processo fica facilitado, caso contrário torna-se um pouco mais trabalhoso.

Vejam os o primeiro caso,

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \quad (2.5.5)$$

A Função de Transferência, neste caso, pode apresentar-se na forma

$$(s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n)Y(s) = b_0 U(s)$$

Aplicando a Transformada Inversa de Laplace a cada um dos termos e admitindo nulas as condições iniciais do problema, obtém-se a seguinte equação diferencial

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1} \dot{y}(t) + a_n y(t) = b_0 u \quad (2.5.6)$$

Considerando as seguintes variáveis de estado

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t) \\ x_2(t) &= \dot{y}(t) \\ &\vdots \\ x_n(t) &= y^{(n-1)}(t) \end{aligned}$$

a equação (2.2.2) pode ser, directamente, convertida na forma de representação em Espaço de Estado.

Considerando o seguinte sistema de equações

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= -a_1 x_n(t) - \dots - a_{n-1} x_2(t) - a_n x_1(t) + b u(t) \end{aligned}$$

e reescrevendo-o sob a forma

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

onde

$$x(t) = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{Bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b_0 \end{Bmatrix}$$

Dado que só existe uma variável de saída, $y = x_1$, as matrizes C e D apresentam-se da seguinte forma

$$C = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]$$

$$D = 0$$

Desde modo obteve-se, tal como pretendido, a representação do sistema em Espaço de Estado quando o numerador da Função de Transferência é uma constante.

Como nem sempre tal acontece, e o numerador pode apresentar-se como uma função polinomial ao invés de uma constante, o método a seguir descrito permite obter a representação sob a forma de Espaço de Estado para sistemas com esta particularidade.

Seja

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} \quad (2.5.7)$$

Reescrevendo a função anterior como o produto de duas novas funções

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Y(s)}{W(s)} \times \frac{W(s)}{U(s)}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{W(s)} \times \frac{W(s)}{U(s)} &= \\ &= (b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_n) \left[\frac{1}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \right] \end{aligned} \quad (2.5.8)$$

Recorrendo à Transformada Inversa de Laplace para converter cada uma das funções anteriores para o domínio do tempo, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{W(s)} &= b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_n \\ \Rightarrow y(t) &= b_0 w^{(n)}(t) + b_1 w^{(n-1)}(t) + \dots + b_{n-1} \dot{w}(t) + b_n w(t) \end{aligned} \quad (2.5.9)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{W(s)}{U(s)} &= \frac{1}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \\ \Rightarrow u(t) &= w^{(n)}(t) + a_1 w^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1} \dot{w}(t) + a_n w(t) \end{aligned} \quad (2.5.10)$$

Tal como para a equação (2.5.6), é possível converter a equação (2.2.2) para uma representação em Espaço de Estado, considerando para o efeito as seguintes variáveis de estado

$$\begin{aligned} x_1(t) &= w(t) \\ x_2(t) &= \dot{w}(t) \\ &\vdots \\ x_n(t) &= w^{(n-1)}(t) \end{aligned} \quad (2.5.11)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= w^{(n)} = -a_n x_1(t) - a_{n-1} x_2(t) - \dots - a_1 x_n(t) + u(t) \end{aligned} \quad (2.5.12)$$

Na forma matricial toma a forma

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

onde

$$x(t) = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{Bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Reescrevendo a equação de saída do sistema, (2.5.9), em termos das variáveis de estado, temos

$$y(t) = b_0 \dot{x}_n + b_1 x_n + \cdots + b_n x_1$$

Substituindo o valor de $\dot{x}_n(t)$, obtido na equação (2.2.2), vem

$$y(t) = b_0 [-a_n x_1(t) - a_{n-1} x_2(t) - \cdots - a_1 x_n(t) + u(t)] + b_1 x_n + \cdots + b_n x_1$$

Rearranjando a expressão anterior e apresentando na forma matricial

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

onde

$$C = [-b_0 a_n \quad -b_0 a_{n-1} + b_{n-1} \quad \cdots \quad -b_0 a_1 + b_1]$$

$$D = b_0$$

Assim, através do método aqui descrito, é possível obter a representação em Espaço de Estado tendo por base Funções de Transferência cujo numerador não é constante.

Capítulo 3

Modelação e Análise de Sistemas de Controlo

Entende-se por controlador uma interconexão de componentes projectados para manipular as entradas aplicadas a um determinado sistema de modo a que as variáveis de saída possam apresentar um desempenho desejado.

3.1. DIAGRAMA DE BLOCOS

Um sistema de controlo consiste em várias componentes e, como tal, é necessário saber qual a função desempenhada por cada uma delas. Assim, na engenharia de controlo, é comum recorrer-se aos diagramas de blocos.

O diagrama de blocos é uma representação por meio de símbolos, do fluxo de sinais e das funções desempenhadas por cada componente de um sistema de controlo. Num diagrama de blocos, as variáveis do sistema estão ligadas entre si através de blocos funcionais. O bloco é uma representação das operações que são efectuadas sobre o sinal à sua entrada. Esta representação tem como principal vantagem a simplificação da análise dos sistemas, permitindo, num único esquema, ter uma imagem geral da estrutura que ele representa. Porém, não fornece qualquer informação sobre a estrutura física do sistema. Qualquer sistema dinâmico pode ser representado através desta técnica [17].

Na Figura 3.1 está representado um elemento de um diagrama de blocos, no qual o sinal de entrada, $I(s)$, é transformado no sinal de saída, $O(s)$, através da Função de

Transferência, $G(s)$, também conhecida como ganho do bloco. Com base no que foi exposto no capítulo 2.4, $G(s) = (O(s))/(I(s))$, logo o sinal de saída obtém-se multiplicando-se o sinal de entrada pela respectiva Função de Transferência, $O(s) = G(s)I(s)$. Esta operação pode ser efectuada no domínio do tempo ou em domínio de Laplace.

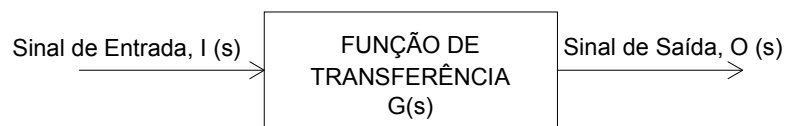


Figura 3.1 - Elemento de um diagrama de bloco

No que se segue serão apresentados dois tipos de controlo passíveis de serem implementados.

3.2. CONTROLO EM MALHA ABERTA

Este tipo de controlo consiste em aplicar um sinal pré-determinado à estrutura com vista a obter, ao final de determinado tempo, um determinado valor ou comportamento para a variável a ser controlada. Neste tipo de controlo não existe a preocupação em utilizar a informação relativa ao comportamento da estrutura perante o sinal de entrada, para correcção da acção de controlo, ou seja não existe uma realimentação.

O funcionamento de um sistema deste tipo pode ser representado através do seguinte modo,

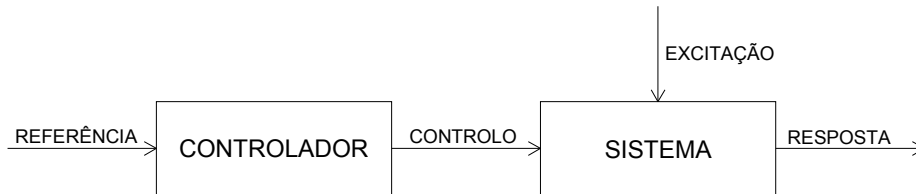


Figura 3.2 - Diagrama de bloco de um sistema em malha aberta

3.3. CONTROLO EM MALHA FECHADA

Num sistema de controlo em malha fechada, a resposta efectiva do sistema é continuamente medida e, com base nela, a acção de controlo é permanentemente corrigida com vista a atingir um objectivo inicialmente proposto. Nesta situação diz-se que o sistema é realimentado.

Este tipo de controlo é muito eficaz face à excitação e factores externos cuja estrutura está sujeita. Tem, no entanto, a desvantagem de serem muito dispendiosos quando comparados com os sistemas em malha aberta.

O funcionamento de um sistema de malha fechada pode ser esquematizado como se segue,

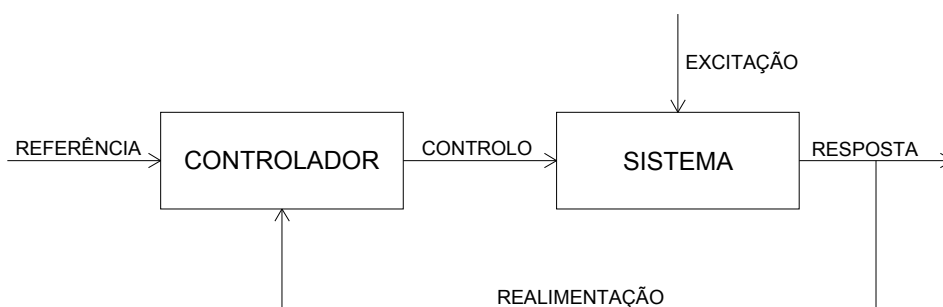


Figura 3.3 - Diagrama de bloco de um sistema em malha fechada

Quando o sistema de controlo é do tipo realimentado, o controlador baseia-se no erro, ou seja, na diferença entre a resposta efectiva e a resposta de referência, para decidir

qual a correcção a introduzir. Essa correcção não é necessária apenas quando o erro é nulo.

Quando o controlador age no sentido inverso da variação de saída, ou seja, no sentido da estabilização do sistema, este tipo de realimentação designa-se de negativa e é o mais corrente em controlo de sistemas.

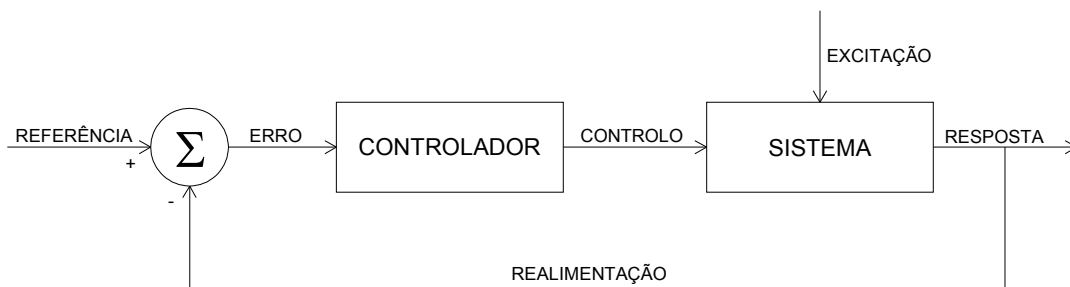


Figura 3.4 - Diagrama de bloco de um sistema em malha fechada com realimentação negativa

Quando, pelo contrário, os sistemas actuam no mesmo sentido da variação da variável de saída, ou seja, aumentando as variações ou perturbações então, neste caso, estamos perante uma realimentação positiva.

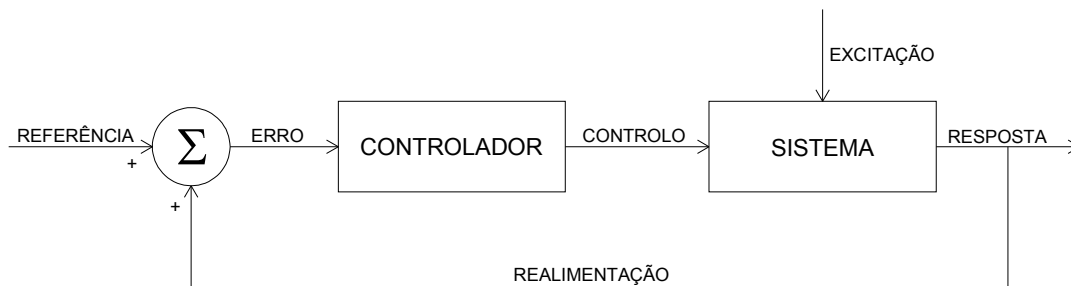


Figura 3.5 - Diagrama de bloco de um sistema em malha fechada com realimentação positiva

3.4. FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DE UM SISTEMA EM MALHA FECHADA

O seguinte diagrama representa um sistema em malha fechada onde $G_e(s)$ e $G_c(s)$ são as Funções de Transferência que definem o sistema a controlar e o controlador, respectivamente. $U(s)$ é o sinal de controlo gerado que funciona como entrada no sistema. Perante este sinal, o sistema responde com um sinal de saída, $Y(s)$. $H(s)$ é a Função de Transferência do sensor que possibilita a conversão do sinal de saída e situa-se no ciclo de realimentação. Este sinal será comparado com a referência, $R(s)$, valor espectável em termos de resposta, e originará a variável erro, $E(s)$.

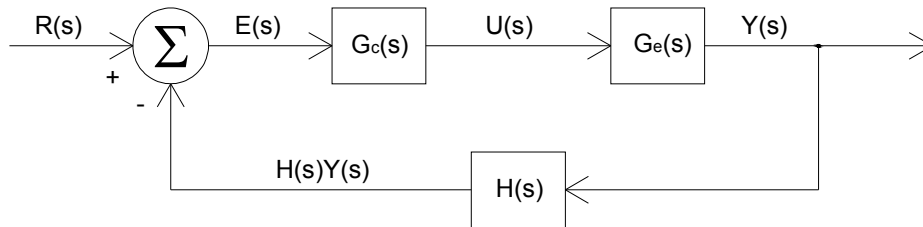


Figura 3.6 - Funções de transferência em um sistema em malha fechada

$G_e(s)$ e $G_c(s)$, sendo funções em série, podem ser substituídas por uma função equivalente.

Como se pode observar, $U(s)$ é simultaneamente a saída do primeiro bloco e a entrada do segundo. Deduzindo o resultado da aplicação isolada de cada um dos blocos e, combinando-os entre si, possibilita a obtenção de uma função equivalente que relaciona $E(s)$ com $Y(s)$.

Tendo em conta apenas o primeiro bloco e, sabendo que $E(s)$ é a entrada e $U(s)$ é a saída, a Função de Transferência associada será

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)}$$

Considerando o segundo bloco e recorrendo ao mesmo raciocínio temos

$$G_e(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Resolvendo ambas as igualdades em função a $U(s)$ e eliminando-a vem

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = G_c(s)G_e(s) = G(s) \quad (3.4.1)$$

Sendo esta a função global do sistema, é possível substituir o diagrama de blocos por

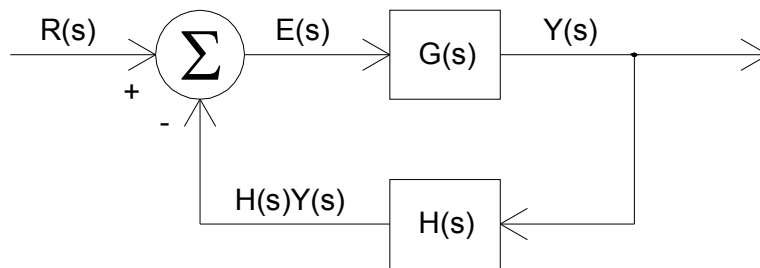


Figura 3.7 - Função de transferência equivalente em um sistema em malha fechada

A variável erro deste diagrama é dada por

$$E(s) = R(s) - H(s)Y(s) \quad (3.4.2)$$

Partindo desta igualdade e, sabendo que $Y(s) = G(s)E(s)$, é possível obter a Função de Transferência de um sistema em malha fechada, quando não existem perturbações exteriores.

Eliminando o erro, $E(s)$ das equações anteriores, e explicitando em ordem a $Y(s)$, vem

$$Y(s) = \frac{G(s)R(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (3.4.3)$$

A equação que relaciona a resposta efectivamente medida do sistema com a resposta de referência é dada por

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (3.4.4)$$

No caso de haver perturbações exteriores ao sistema seria igualmente possível deduzir a respectiva Função de Transferência em malha fechada, bastando para isso somar à acção de controlo a acção exterior.

Capítulo 4

Controlo Clássico VS Controlo Moderno

No âmbito do controlo podemos falar em controlo clássico e moderno. No controlo clássico o conceito mais utilizado é o de Função de Transferência, onde a análise e dimensionamento são feitos, geralmente, no domínio da frequência. Normalmente é utilizado quando se trata de controlo de sistema com uma única entrada e uma única saída, visto ser neste campo que produz melhores resultados. No controlo moderno, por sua vez, recorre-se ao conceito de Espaço de Estado e a análise e dimensionamento são feitos no domínio do tempo [20].

Dentro do primeiro grupo enquadram-se o controlo proporcional, o controlo integral, o controlo derivativo (e todos os outros que advêm destes), método do Lugar das Raízes, entre outros. No segundo grupo inserem-se o controlo ótimo, o controlo preditivo, controlo adaptativo, entre outros.

No presente trabalho serão abordados alguns tipos de controlo clássico, contudo, dar-se-á maior importância ao controlo ótimo visto ser este o utilizado mais à frente, na componente prática deste estudo.

4.2. CONTROLADORES BÁSICOS

4.2.1. Controlador Proporcional

O controlador proporcional ajusta o sinal de saída em proporção directa ao sinal de erro. A sua lei de controlo, no domínio do tempo, é dada por

$$u(t) = K_p e(t) \quad (4.2.1)$$

Logo, a acção deste tipo de controlador resume-se à aplicação de um ganho constante e a sua Função de Transferência, no domínio de Laplace, é

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \quad (4.2.2)$$

onde K_p é uma constante designada por ganho proporcional.

Numa estrutura real o objectivo do controlo é anular as oscilações que possam surgir quando esta for solicitada por forças exteriores, ou seja, anular a sua resposta dinâmica. Em termos de dimensionamento de um controlador, anular a resposta dinâmica da estrutura equivale a dizer que a sua resposta de referência é nula. Ora, sabendo que o erro de um sistema de controlo é a diferença entre a resposta de referência e aquela que é efectivamente medida, é possível estabelecer a seguinte igualdade

$$e(t) = r(t) - y(t) = 0 - y(t) = -y(t) \quad (4.2.3)$$

No caso de um sistema de um grau de liberdade sujeito a uma força exterior $f(t)$ e a uma força de controlo $u(t)$, a equação de equilíbrio pode ser descrita como

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = f(t) + u(t) \quad (4.2.4)$$

Sabendo que $e(t) = -y(t)$, a lei de controlo de um controlador do tipo proporcional define-se do seguinte modo

$$u(t) = -K_p y(t) \quad (4.2.5)$$

Substituindo esta igualdade na expressão (4.2.4), e colocando $y(t)$ em evidência tem-se

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + (k + K_p)y(t) = f(t) + u(t) \quad (4.2.6)$$

Daqui é possível concluir que, através do ganho do controlador proporcional, o sistema adquire uma maior rigidez.

A utilização deste tipo de controlo é bastante útil quando se pretende modificar a frequência natural de um sistema, sendo igualmente possível definir exactamente qual o ganho necessário para que essa frequência atinja um determinado valor previamente estabelecido.

No entanto, quando utilizado sozinho, o controlador proporcional tem a desvantagem de poder levar o sistema à instabilidade e apresentar erro em regime permanente.

O diagrama de bloco para este tipo de controlo tem o seguinte aspecto

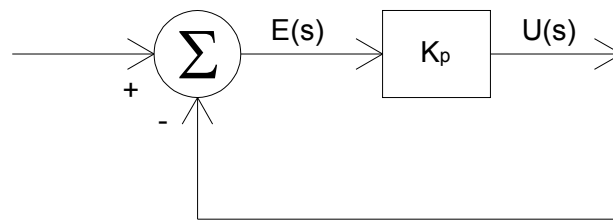


Figura 4.1 - Diagrama de bloco para um controlador do tipo proporcional

4.2.2. Controlador Integral

Neste método o sinal de entrada que é dado ao sistema, através do controlador, é proporcional ao integral do erro ao longo do tempo, ou seja,

$$\frac{du(t)}{dt} = K_i e(t) \quad (4.2.7)$$

A lei que rege este tipo de controlo é dada por

$$u(t) = K_i \int_0^t e(t) dt \quad (4.2.8)$$

onde K_i é o ganho integral e $K_i = \frac{K_p}{T_i}$.

A sua Função de Transferência em termos da Transformada de Laplace apresenta-se da seguinte forma

$$U(s) = K_i \frac{1}{s} E(s)$$

Logo

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K_i}{s} \quad (4.2.9)$$

Por observação da expressão (4.2.7) verifica-se que a variação de $u(t)$ é duas vezes mais rápida quando se duplica $e(t)$.

A acção de um controlador integral tem como principal função anular o erro em regime permanente. Contudo, se a acção de um controlador integral for aplicada isoladamente, tende a piorar a estabilidade relativa do sistema. Como tal, o controlo do tipo integral é frequentemente combinado com o controlo proporcional.

O diagrama de blocos de um controlador integral representa-se do seguinte modo

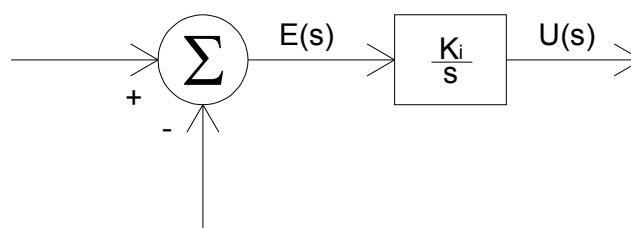


Figura 4.2 - Diagrama de bloco para um controlador do tipo integral

4.2.3. Controlador Derivativo

A lei que rege este tipo de controlo é dada por

$$u(t) = K_d \dot{e}(t) \quad (4.2.10)$$

ou seja, o sinal de entrada dado ao sistema é proporcional à derivada do erro.

Em termos da Transformada de Laplace a expressão (4.2.10) adquire o seguinte aspecto

$$U(s) = K_d s E(s) \quad (4.2.11)$$

Logo, a Função de Transferência de um controlador derivativo é a seguinte

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_d s \quad (4.2.12)$$

Nas equações anteriores K_d é o ganho derivativo e $K_d = T_d K_p$.

Repetindo o mesmo procedimento já efectuado para o controlador proporcional, é possível concluir que a utilização de um controlador do tipo derivativo permite determinar qual o valor do ganho que conduz a um valor previamente estabelecido de amortecimento estrutural.

Através da equação (4.2.3) sabe-se que

$$\dot{e}(t) = -\dot{y}(t) \quad (4.2.13)$$

Substituindo na expressão (4.2.10)

$$u(t) = K_d \dot{e}(t) = -K_d \dot{y}(t) \quad (4.2.14)$$

Introduzindo esta força de controlo na equação de equilíbrio (4.2.4) vem,

$$m\ddot{y}(t) + (c + K_d)\dot{y}(t) + ky(t) = f(t) \quad (4.2.15)$$

A aplicação deste tipo de controlo aumenta o amortecimento do sistema, somando a sua constante de ganho ao amortecimento passivo já existente.

Salienta-se também o facto do controlo derivativo ter um carácter de antecipação, porém tem a desvantagem de amplificar ruídos e poder causar saturação no actuador.

O controlo derivativo não pode ser utilizado isoladamente pois apenas tem efeito no transitório. Assim, é geralmente utilizado em conjunto com o controlo proporcional e integral, com o objectivo de antecipar o sinal de entrada do sistema, para que o processo se torne mais rápido.

4.2.4. Controlador Proporcional-Integral (PI)

A lei que traduz a acção de um controlador deste tipo é a seguinte

$$u(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(t) dt \quad (4.2.16)$$

Assim, a sua Função de Transferência no domínio de Laplace é definida do seguinte modo

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) \quad (4.2.17)$$

Nas equações (4.2.16) e (4.2.17), K_p é o ganho proporcional e T_i é o tempo integral.

O seu respectivo diagrama de blocos é o seguinte

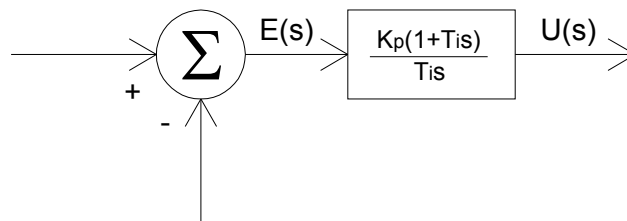


Figura 4.3 - Diagrama de bloco para um controlador do tipo proporcional-integral

4.2.5. Controlador Proporcional-Derivativo (PD)

A lei que rege este tipo de controlo é dada por

$$u(t) = K_p e(t) + K_p T_d \frac{de(t)}{dt} \quad (4.2.18)$$

A sua Função de Transferência é dada por

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p(1 + T_d s) \quad (4.2.19)$$

Nas equações (4.2.18) e (4.2.19) K_p é o ganho proporcional e T_d é uma constante designada por tempo derivativo, ou seja, o intervalo de tempo pelo qual a acção de controlo antecipa a acção proporcional.

O diagrama de blocos de um controlador Proporcional-Derivativo é representado do seguinte modo

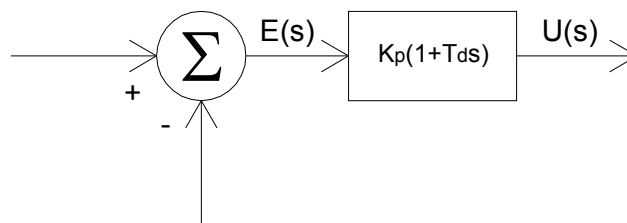


Figura 4.4 - Diagrama de bloco para um controlador do tipo proporcional-derivativo

4.2.6. Controlador Proporcional-Integral-Derivativo (PID)

O objectivo do controlador Proporcional-Integral-Derivativo, PID, é tirar partido das características particulares de cada um dos controladores referidos anteriormente, diminuindo o tempo de resposta e mantendo a estabilidade do sistema.

A equação do controlador PID é dada pela soma das contribuições de cada um dos controladores isolados,

$$u(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(t) dt + K_p T_d \frac{de(t)}{dt} \quad (4.2.20)$$

A sua Função de Transferência é a seguinte

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \quad (4.2.21)$$

onde K_p é o ganho proporcional, T_i é o tempo integral e T_d é o tempo derivativo.

A utilização deste tipo de controlo, apesar de implicar uma instalação mais dispendiosa inicialmente, proporciona grandes vantagens pois permite um controlo mais rápido e exacto.

O diagrama de blocos representativo de um controlador do tipo PID é o seguinte

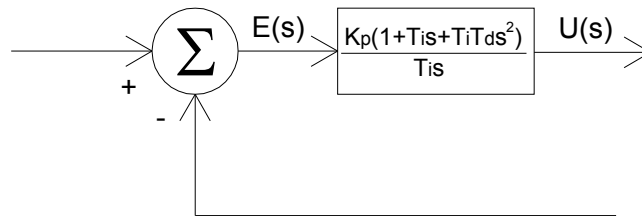


Figura 4.5 - Diagrama de bloco para um controlador do tipo proporcional-integral-derivativo

4.3. REGULADOR LINEAR QUADRÁTICO (LQR)

Um sistema de controlo pode ser projectado para atingir determinados objectivos de desempenho com o menor gasto de energia possível. Um sistema deste tipo, que minimiza o custo associado ao processo, designa-se de controlo óptimo. Para tal, é

necessário conhecer a função objectivo que será minimizada no dimensionamento desse mesmo sistema.

O controlo do tipo LQR baseia-se na minimização de um parâmetro quadrático que está directamente associado à energia das variáveis de estado e dos sinais de controlo a serem projectados.

A aplicação deste método no controlo de sistemas pressupõe que o mesmo esteja descrito na forma de Espaço de Estado

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (4.3.1)$$

$$y = Cx + Du \quad (4.3.2)$$

e a sua lei de controlo seja definida como

$$u = -K(x - x_d) \quad (4.3.3)$$

onde x_d representa o vector de estado desejável no equilíbrio do sistema.

Assim, a equação (4.3.1) pode ser rescrita do seguinte modo

$$\dot{x} = (A - BK)x + BKx_d \quad (4.3.4)$$

Relacionando a equação (4.3.1) com a (4.3.4), observa-se que a matriz A inicial, no sistema em malha fechada, apresenta-se na forma $(A - BK)$ e a matriz B na forma (BK) .

O objectivo é determinar a matriz K que minimize o seguinte índice de desempenho

$$J = \int_0^{\infty} x^T Q x dt + \int_0^{\infty} u^T R u dt \quad (4.3.5)$$

sabendo que $u = -K(x - x_d)$.

O segundo termo da equação (4.3.5) reflecte o dispêndio de energia dos sinais de controlo, e Q e R são matrizes de ponderação que determinam a importância relativa do erro e desse gasto de energia, ou seja, representam as penalizações impostas à resposta obtida, $x(t)$, e ao controlo empregue ao longo do tempo, $u(t)$. Note-se que Q é uma matriz Hermitiana ou real simétrica e definida positiva (ou semi-definida positiva) e R é uma matriz Hermitiana ou real simétrica e definida positiva.

A determinação das matrizes Q e R é um procedimento demorado e trabalhoso que, normalmente, é feito por tentativa e erro. Regra geral, escolhem-se matrizes diagonais pois assim as componentes do estado e do controlo são afectadas individualmente, o que facilita o seu ajuste e a interpretação dos resultados.

Após a determinação das matrizes Q e R que se adequam melhor ao sistema, a matriz de ganho, K , pode ser encontrada resolvendo a equação de Riccati. Na parte prática deste trabalho recorre-se ao MATLAB para calcular a referida matriz, contudo, este tem por base o procedimento seguidamente demonstrado.

4.3.1. Equação de Riccati

Partindo da formulação em Espaço de Estado do sistema dinâmico,

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

e da lei de controlo definida por

$$u(t) = -Kx(t) \tag{4.3.6}$$

a equação de Riccati permite obter a matriz de ganho óptima do sistema.

Substituindo a equação (4.3.6) na expressão (2.2.1) tem-se

$$\dot{x} = Ax - BKx = (A - BK)x \tag{4.3.7}$$

E substituindo (4.3.6) em (4.3.5) vem,

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + x^T K^T R K x) dt$$

$$J = \int_0^{\infty} x^T (Q + K^T R K) x dt \quad (4.3.8)$$

Através da teoria de problemas de optimização [21], sabe-se que

$$x^T (Q + K^T R K) x = -\frac{d}{dt} (x^T P x) \quad (4.3.9)$$

Assim, obtém-se

$$x^T (Q + K^T R K) x = -\dot{x}^T P x - x^T P \dot{x} = -x^T [(A - BK)^T P + P(A - BK)] x \quad (4.3.10)$$

Comparando ambos os lados desta equação e sabendo que a mesma tem que ser verdadeira para qualquer x , é necessário que

$$(A - BK)^T P + P(A - BK) = -(Q + K^T R K) \quad (4.3.11)$$

Com base no segundo método de Liapunov [7], que não será abordado neste trabalho, a equação (4.3.11) pode ser rescrita do seguinte modo

$$(A^T - K^T B^T) P + P(A - BK) + Q + K^T T^T T K = 0 \quad (4.3.12)$$

Onde $R = T^T T$, sendo T uma matriz não singular.

A minimização da expressão (4.3.5) requer a minimização de

$$x^T [TK - (T^T)^{-1} B^T P]^T [TK - (T^T)^{-1} B^T P] x \quad (4.3.13)$$

Desde que a expressão anterior seja não negativa, o mínimo ocorre quando

$$TK = (T^T)^{-1}B^TP \quad (4.3.14)$$

Assim, a expressão que permite determinar o valor óptimo da matriz K é dada por

$$K = T^{-1}(T^T)^{-1}B^TP = R^{-1}B^TP \quad (4.3.15)$$

A matriz P precisa satisfazer a equação (4.3.11) ou a equação algébrica de Riccati definida do seguinte modo

$$A^TP + PA - PBR^{-1}B^TP + Q = 0 \quad (4.3.16)$$

Resolvendo a equação anterior em função de P e substituindo o resultado obtido na expressão (4.3.15) é possível determinar a matriz K .

Capítulo 5

Dimensionamento de Controladores

A escolha entre a teoria de controlo moderno ou clássico prende-se com vários factores, tais como os objectivos que se pretendem atingir e onde e como o sistema irá ser implementado. No entanto, independentemente da teoria adoptada, é necessário saber se o sistema é ou não controlável.

5.1. NOÇÃO DE CONTROLABILIDADE

Entende-se por controlabilidade a possibilidade de se transferir o sistema do seu estado inicial para um estado final qualquer, através de uma acção de controlo $u(t)$. Este conceito está associado à noção intuitiva de se ser, ou não, capaz de controlar o sistema.

O sistema dinâmico descrito por $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, $x(t = 0)$ ou o par (A, B) diz-se controlável se para qualquer estado inicial $x(t = 0) = x_0$, $t_1 > 0$ e o estado final x_1 , existir uma entrada u tal que a solução de $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ satisfaz $x(t_1) = x_1$.

Sendo A e B as matrizes de estado e de entrada do sistema, respectivamente, a matriz de controlabilidade, C_r , define-se como

$$C_r = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] \quad (5.1.1)$$

Um sistema pode ser totalmente ou apenas parcialmente controlável. Diz-se completamente controlável se for possível transferir todos os seus estados.

Um sistema com n variáveis de estado pode ser completamente controlado se a matriz de controlabilidade, C_r , tiver característica n , ou seja, se tiver n linhas ou colunas linearmente independentes.

Quando o sistema não é completamente controlável significa que haverá modos de vibração sobre os quais não se pode exercer qualquer acção de controlo.

5.2. NOÇÃO DE ESTABILIDADE

Quando se pretende analisar o comportamento de um sistema dinâmico, um conceito que adquire elevada importância é o de estabilidade.

Um sistema pode ser estável, instável ou assintoticamente estável. Diz-se que é estável se, e só se, todos os pólos possuírem parte real menor ou igual a zero, e se todos os pólos com parte real igual a zero forem simples. Neste caso, diz-se que o sistema é estável, mas não necessariamente assintoticamente estável, visto que a resposta poderá, ou não, aproximar-se de um determinado valor constante quando $t \rightarrow \infty$. Caso contrário, isto é, se qualquer um dos pólos tiver parte real positiva ou se os pólos com parte real igual a zero forem múltiplos então, com o avançar do tempo, a resposta transitória aumenta monotonamente ou oscila com amplitude crescente, tornando o sistema instável [22].

A estabilidade ou instabilidade é uma propriedade do sistema, não dependendo da entrada aplicada ao mesmo [23].

Existem diversos métodos que nos permitem calcular os pólos de um sistema e saber se os mesmos se encontram na metade direita ou esquerda do plano complexo, como o critério de Routh-Hurwitz, método do Lugar das Raízes ou ainda o critério de estabilidade de Nyquist. nenhuns destes métodos serão utilizados na componente prática deste estudo visto que através da ferramenta MATLAB é-nos possível retirar essa mesma informação recorrendo às funções “pole(sys)”, “zero(sys)” ou “pzmap(sys)”

[24]. Contudo, será feita uma rápida abordagem ao método do Lugar das Raízes por ser bastante utilizado actualmente na análise da estabilidade.

5.3. MÉTODO DO LUGAR DAS RAÍZES NA ANÁLISE DA ESTABILIDADE

Considerando o sistema de controlo em malha fechada representado na Figura 5.1,

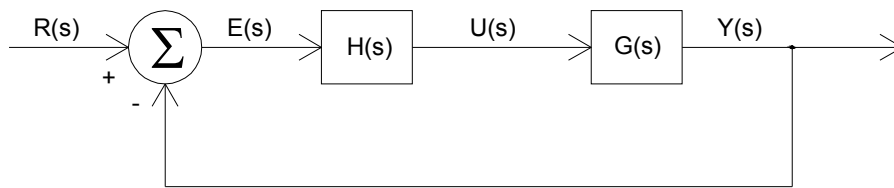


Figura 5.1 - Diagrama de blocos de um sistema em malha fechada SISO (single-input, single output)

A equação em malha fechada deste sistema é,

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)H(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Nesta equação, $1 + G(s)H(s)$, é chamada de função de diferença de retorno. Esta diferença é uma propriedade da malha de realimentação e advém do facto de se $R(s) = 0$, então $Y(s) = G(s)U(s)$ e $U(s) = -H(s)Y(s)$. Combinando estas duas equações vem que $Y(s) = -G(s)H(s)Y(s)$ ou $[1 + G(s)H(s)]Y(s) = 0$. O método do Lugar das Raízes determina a estabilidade de um sistema através da análise da diferença de retorno, ou seja, se esta diferença for nula para qualquer valor de s no semi-plano complexo direito, implica que deverá haver um pólo em malha fechada com parte real positiva, logo, através do exposto no ponto anterior, este sistema poderá ser instável.

5.4. CARACTERIZAÇÃO QUALITATIVA DA RESPOSTA TRANSITÓRIA

No estudo e dimensionamento de sistemas de controlo é necessário definir alguns parâmetros que nos irão dar informações relativas ao comportamento do sistema quando sujeitos a determinadas acções exteriores. Em alguns casos, não existe a necessidade de conhecer com rigor a resposta temporal do sistema, e sim caracterizá-la qualitativamente. Normalmente, as características do desempenho de um sistema de controlo são especificadas em termos da resposta transitória quando sujeita a uma acção tipo degrau unitário. Note-se que esta resposta está dependente das condições iniciais do sistema. Este modo de caracterização é vantajoso visto que, se a resposta de um sistema a uma acção deste tipo for conhecida, então é possível matematicamente obter a resposta para qualquer outro tipo de acção.

Os parâmetros mais usuais para caracterizar o comportamento do sistema são designados de tempo de subida, t_r , tempo de pico, t_p , sobre-elevação percentual, M_p , e tempo de assentamento, t_s , e encontram-se representados na Figura 5.2.

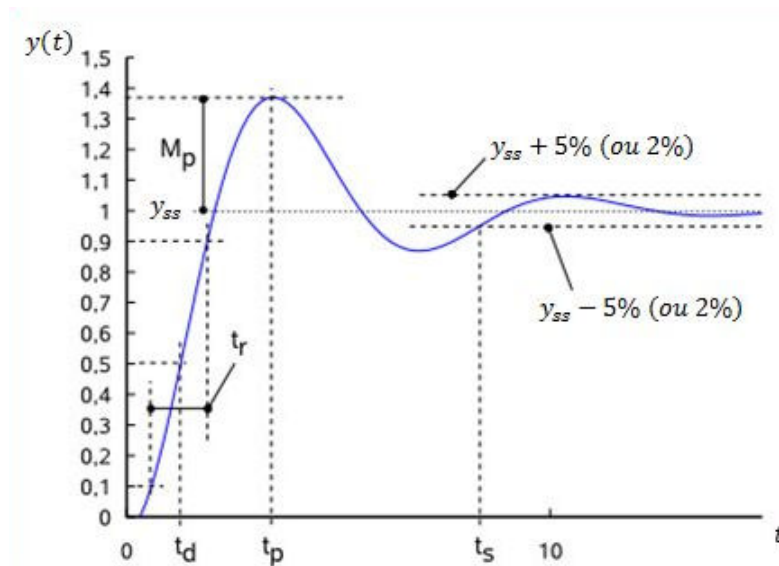


Figura 5.2 - Curva de resposta de um sistema para uma acção do tipo degrau unitário

Entende-se por tempo de subida, t_r , o tempo necessário para que a resposta do sistema passe de 10% a 90%, de 5% a 95%, ou de 0% a 100% do valor final. No caso de sistemas de segunda ordem sub-amortecidos é normalmente utilizado o tempo de subida de 0% para 100% e para sistemas sobre-amortecido geralmente adota-se o intervalo 10% a 90% [17].

Tempo de pico, t_p , é o tempo necessário para que um sistema atinja o primeiro máximo após ter ultrapassado o valor estacionário da resposta.

Define-se sobre-elevação percentual máxima, M_p , como o valor percentual da resposta máxima, associada ao tempo de pico, relativamente ao valor da resposta estacionária. Este valor pode ser calculado através da seguinte expressão

$$M_p = \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)} * 100\% \quad (5.4.1)$$

Tempo de assentamento, t_s , é o tempo necessário para que a curva da resposta do sistema não ultrapasse uma faixa definida por 2% ou 5% em torno do valor final, aí permanecendo indefinidamente.

Capítulo 6

Implementação de um Sistema de Controlo num Modelo Laboratorial

Neste capítulo apresenta-se a implementação de um sistema de controlo de vibrações numa estrutura flexível e a verificação da eficiência do controlo num modelo laboratorial.

O modelo utilizado nesta experiência é o “Smart Structure” (QUANSER), disponível no Departamento de Engenharia Civil, Figura 6.1, e permite estudar/simular o controlo activo com sistema AMD numa estrutura flexível.

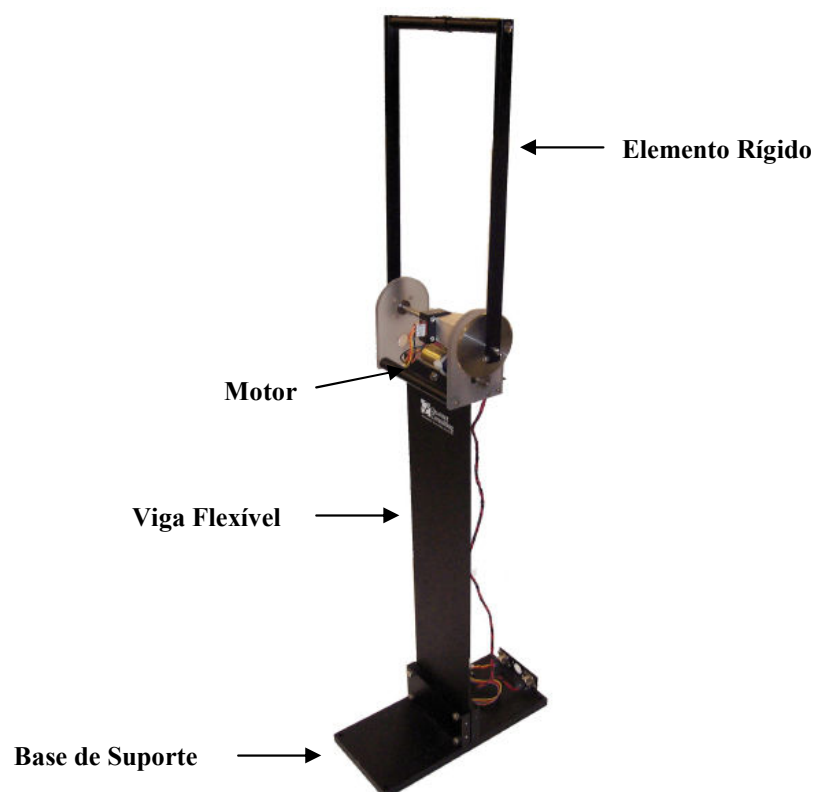


Figura 6.1 - “Smart Structure”

O equipamento consiste num elemento vertical flexível (materializando o edifício), assente numa base plana. No topo da viga encontra-se ligada, através de um motor, um elemento rígido de grande inércia que se comporta como um pêndulo. A posição angular deste elemento é controlável através do motor, podendo assim modelar o AMD. [25, 26].

Assim, será desenvolvido um sistema de controlo, recorrendo a simulações em MATLAB, capaz de amortecer o movimento da barra flexível através do ajuste do ângulo do pêndulo, recorrendo a um modelo numérico que permita simular o comportamento dinâmico desta estrutura.

O capítulo está dividido em duas partes. Na primeira parte apresenta-se a modelação da dinâmica do sistema e o estudo do sistema controlado e não controlado.

Na segunda parte será feito um estudo sobre a influência dos vários parâmetros de controlo, recorrendo ao MATLAB e através de simulações utilizando a ferramenta SIMULINK. Os resultados obtidos na modelação numérica serão comparados com os resultados obtidos experimentalmente.

Por fim, descreve-se o processo adoptado na implementação de um sistema de controlo, recorrendo a um Regulador Linear Quadrático (LQR), aplicado ao “Smart Structure”. Este ensaio teve como objectivo a verificação experimental dos conceitos que foram abordados ao longo deste trabalho. Através de diversas simulações em laboratório, e utilizando o programa MATLAB, analisou-se a influência das matrizes de ponderação Q e R no comportamento do sistema quando estas são sujeitas a alterações e quais são os ganhos envolvidos no processo. Como já foi dito anteriormente, a determinação dessas matrizes nem sempre é uma tarefa fácil. Como tal, partiu-se de valores previamente estudados a fim de se poder aferir qual a relação entre os parâmetros alterados e a saída do sistema.

6.1. EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

As equações de movimento serão deduzidas a partir da 2ª Lei de Newton, adoptando o modelo apresentado na Figura 6.2b) e no diagrama de corpo livre da Figura 6.3. O sistema tem dois graus de liberdade, associados à posição x_b do topo da viga flexível e à rotação θ do elemento rígido.

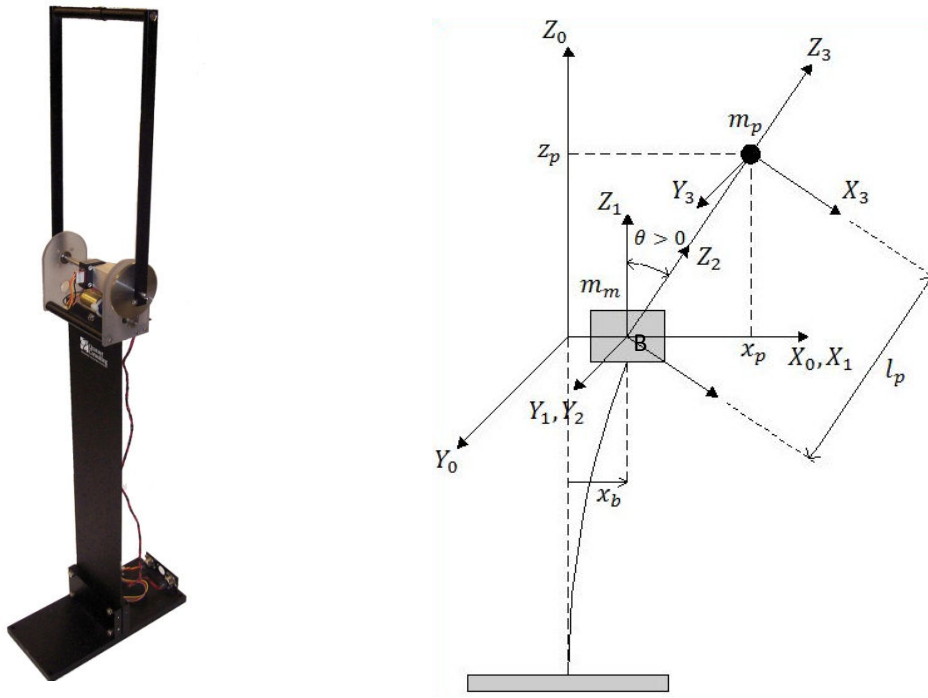


Figura 6.2 - (a) “Smart Strutture”, (b) Esquema “Smart Structure”

O sistema vibra no plano $XoZo$ e na Figura 6.3 estão representadas as forças que actuam sobre o mesmo quando este se encontra actuado, sendo que m_m representa a massa do motor, T a força exercida por este, m_p a massa da viga transversal, K_s a rigidez da viga flexível e J_p o momento de inércia do elemento rígido. A posição da massa m_p no referencial $X_0Y_0Z_0$ (Figura 6.2b) é,

$$x_p = x_b + l_p \sin \theta$$

$$z_p = l_p \cos \theta$$

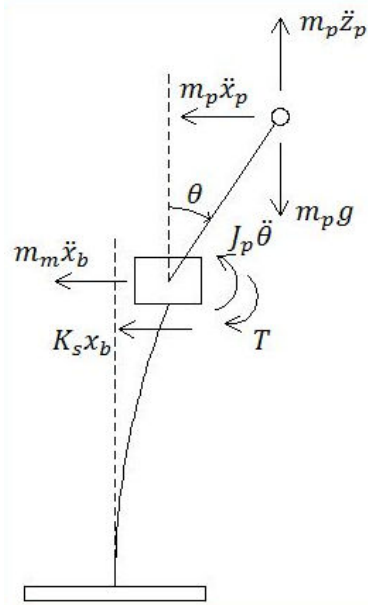


Figura 6.3 - Diagrama de corpo livre

A equação de equilíbrio dinâmico associada ao movimento horizontal, $\sum \vec{F} = m\vec{a}$, resulta:

$$m_m \ddot{x}_b + m_p \ddot{x}_p + K_s x_b = 0$$

$$m_m \ddot{x}_b + m_p \frac{d^2}{dt^2} (x_b + l_p \sin \theta) + K_s x_b = 0$$

$$(m_m + m_p) \ddot{x}_b + m_p l_p [-\dot{\theta}^2 (\sin \theta) + \ddot{\theta} (\cos \theta)] + K_s x_b = 0$$

$$K_s x_b - m_p l_p \dot{\theta}^2 \sin \theta + (m_m + m_p) \ddot{x}_b + m_p l_p \ddot{\theta} \cos \theta = 0 \quad (6.1.1)$$

Aplicando a 2ª Lei de Newton para o movimento rotacional da massa m_p em torno do ponto B, $\sum \vec{M} = I\vec{\alpha}$, onde $\alpha = \ddot{\theta}$ é a aceleração angular do sistema e, com base no diagrama de corpo livre da Figura 6.3 vem,

$$-m_p g l_p \sin \theta + m_p \ddot{x}_p l_p \cos \theta + m_p \ddot{z}_p l_p \sin \theta + J_p \ddot{\theta} = T$$

$$m_p \cos \theta l_p \ddot{x}_b + (J_p + m_p l_p^2) \ddot{\theta} - m_p g \sin \theta l_p = T \quad (6.1.2)$$

Na expressão (6.1.3), e na Figura 6.3, T representa a força exercida pelo motor e é igual a

$$T = \frac{k_m k_g}{R_m} (V_m - k_m k_g \dot{\theta}(t)) \quad (6.1.3)$$

Onde V_m é a voltagem do motor e pode variar ao longo do tempo.

Esta expressão é fornecida no manual do equipamento “Smart Structure” [27].

Logo,

$$m_p \cos \theta l_p \ddot{x}_b + (J_p + m_p l_p^2) \ddot{\theta} - m_p g \sin \theta l_p = \frac{k_m k_g}{R_m} V_m - \frac{k_m^2 k_g^2}{R_m} \dot{\theta} \quad (6.1.4)$$

Nas equações (6.1.1) e (6.1.4), x_b , \ddot{x}_b , θ , $\dot{\theta}$, $\ddot{\theta}$ são funções de tempo.

Nota:

$$\frac{d}{dt} \sin \theta = \dot{\theta} (\cos \theta)$$

$$\frac{d}{dt} \cos \theta = -\dot{\theta} (\sin \theta)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \sin \theta = -\dot{\theta}^2 (\sin \theta) + \ddot{\theta} (\cos \theta)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \cos \theta = -\dot{\theta}^2 (\cos \theta) - \ddot{\theta} (\sin \theta)$$

Assim, as equações do movimento são:

$$\begin{cases} K_s x_b - m_p l_p \dot{\theta}^2 \sin \theta + (m_m + m_p) \ddot{x}_b + m_p l_p \ddot{\theta} \cos \theta = 0 \\ m_p \cos \theta l_p \ddot{x}_b + (J_p + m_p l_p^2) \ddot{\theta} - m_p g \sin \theta l_p = \frac{k_m k_g}{R_m} V_m - \frac{k_m^2 k_g^2}{R_m} \dot{\theta} \end{cases}$$

Observa-se que as equações (6.1.1) e (6.1.4) obtidas para o sistema anterior são não lineares devido à presença das funções transcendentais $\sin\theta$ e $\cos\theta$.

Contudo, quando um sistema de controlo é dimensionado para manter a estrutura num determinado ponto de equilíbrio, apenas pequenos desvios desse mesmo ponto precisam ser considerados para avaliar o desempenho desse sistema de controlo. Assim, normalmente, é possível assumir que a resposta da estrutura e o sistema de controlo resultante, são regidos por equações diferenciais lineares, embora possa não ser isto que aconteça na realidade [22].

6.2. LINEARIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

Na engenharia de controlo considera-se uma operação normal do sistema a actuação em torno de uma posição de equilíbrio, onde as oscilações são consideradas pequenas em torno dessa mesma posição. Assim, é possível admitir θ suficientemente pequeno, tal que $\theta\dot{\theta}^2 \cong 0$, $\sin\theta \cong \theta$ e $\cos\theta \cong 1$ e, neste caso, aproximar um sistema não linear a um sistema linear em torno do ponto em análise. Ressalvando, porém, o facto de não se poder assegurar o comportamento fora desse intervalo e nem o comportamento global.

Adoptando, então, a posição vertical como ponto de equilíbrio, e considerando apenas pequenas oscilações em torno dessa mesma posição, é possível linearizar as equações diferenciais (6.1.1) e (6.1.4),

$$K_s x_b - m_p l_p \dot{\theta}^2 \sin\theta + (m_m + m_p) \ddot{x}_b + m_p l_p \ddot{\theta} \cos\theta = 0$$

$$K_s x_b + (m_m + m_p) \ddot{x}_b + m_p l_p \ddot{\theta} = 0 \quad (6.2.1)$$

e

$$m_p \cos\theta l_p \ddot{x}_b + (J_p + m_p l_p^2) \ddot{\theta} - m_p g \sin\theta l_p = -\frac{k_m^2 k_g^2}{R_m} \dot{\theta} + \frac{k_m k_g}{R_m} V_m$$

$$m_p l_p \ddot{x}_b + (J_p + m_p l_p^2) \ddot{\theta} - m_p g \theta l_p = -\frac{k_m^2 k_g^2}{R_m} \dot{\theta} + \frac{k_m k_g}{R_m} V_m \quad (6.2.2)$$

A fim de se obter uma comparação do comportamento da estrutura utilizando modelos linear e não linear, e analisar a validade dessa simplificação, determinou-se a sua resposta para uma acção do tipo degrau unitário.

Seja a função degrau unitário definida por,

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

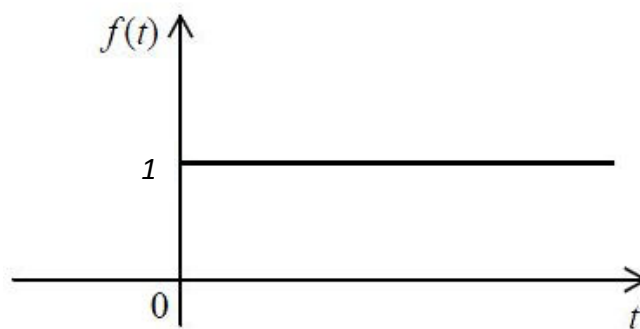


Figura 6.4 - Função degrau unitário

A resolução do sistema de equações diferenciais não lineares foi obtida por de integração numérica através da função “ode23” do programa MATLAB, que implementa o método de Runge-Kutta, e utilizando a função “step” para obter a resposta do sistema linear.

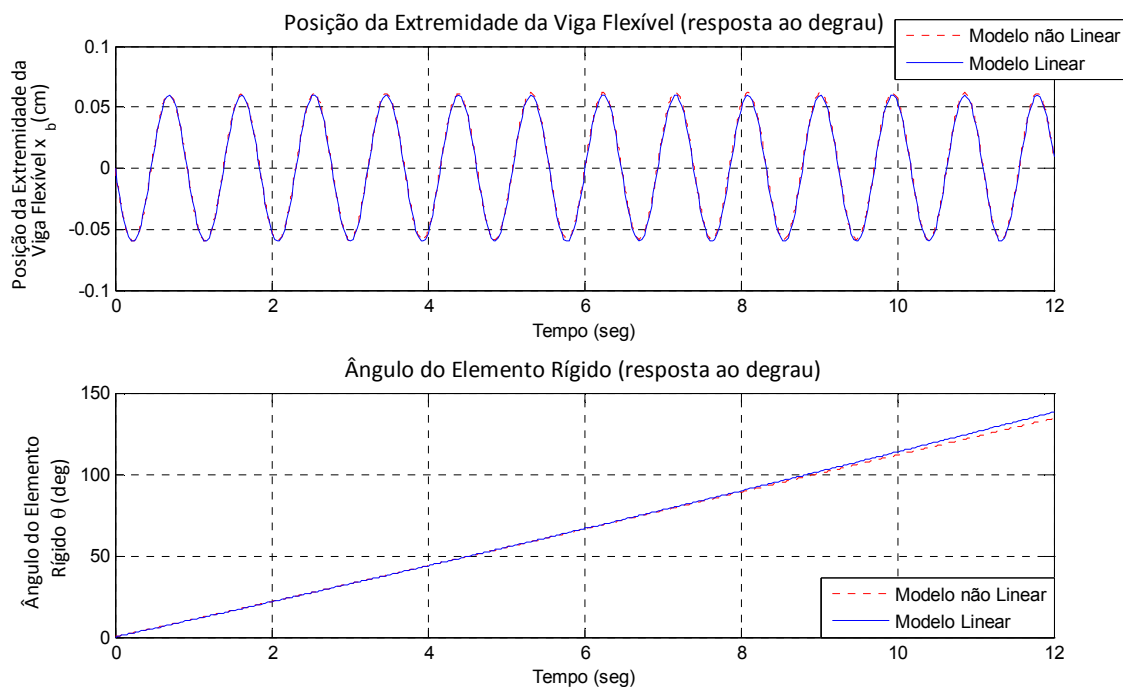


Figura 6.5 - Resposta dos modelos linear e não linear para uma acção tipo degrau

Comparando os resultados obtidos para os dois modelos conclui-se que a linearização das expressões é bastante válida visto que a resposta obtida para o sistema linear é muito semelhante à resposta obtida para o sistema não linear. Este facto pode ser observado na Figura 6.5.

Importa salientar que o ângulo do elemento rígido deve variar entre ± 45 graus para que seja possível mantê-lo na posição vertical.

6.3. REPRESENTAÇÃO EM ESPAÇO DE ESTADO

Para construir o modelo Espaço de Estado do sistema é necessário eliminar as variáveis $\ddot{\theta}$ e \ddot{x}_b das equações de movimento (6.2.1) e (6.2.2), atribuindo-lhes um novo aspecto.

Resolvendo a equação (6.2.1) em função de $\ddot{\theta}$ e substituindo em (6.2.2), tem-se

$$\begin{aligned}
 m_p l_p \ddot{\theta} &= -K_s x_b - (m_m + m_p) \ddot{x}_b \\
 \ddot{\theta} &= -\frac{K_s x_b - (m_m + m_p) \ddot{x}_b}{m_p l_p} \\
 m_p l_p \ddot{x}_b + (J_p + m_p l_p^2) \left(-\frac{K_s x_b - (m_m + m_p) \ddot{x}_b}{m_p l_p} \right) - m_p g \theta l_p &= \\
 &= -\frac{k_m^2 k_g^2}{R_m} \dot{\theta} + \frac{k_m k_g}{R_m} V_m \quad (6.3.1)
 \end{aligned}$$

Resolvendo a equação (6.2.2) em função de \ddot{x}_b e substituindo em (6.2.1), tem-se

$$\begin{aligned}
 m_p l_p \ddot{x}_b &= -\frac{k_m^2 k_g^2}{R_m} \dot{\theta} + \frac{k_m k_g}{R_m} V_m - (J_p + m_p l_p^2) \ddot{\theta} + m_p g \theta l_p \\
 \ddot{x}_b &= -\frac{k_m^2 k_g^2}{R_m m_p l_p} \dot{\theta} + \frac{k_m k_g}{R_m m_p l_p} V_m - \frac{(J_p + m_p l_p^2)}{m_p l_p} \ddot{\theta} + g \theta
 \end{aligned}$$

$$K_s x_b + (m_m + m_p) \left(-\frac{k_m^2 k_g^2}{R_m m_p l_p} \dot{\theta} + \frac{k_m k_g}{R_m m_p l_p} V_m - \frac{(J_p + m_p l_p^2)}{m_p l_p} \ddot{\theta} + g \theta \right) + m_p l_p \ddot{\theta} = 0 \quad (6.3.2)$$

No caso em estudo, o conhecimento da posição e velocidade das massas nele envolvidas permite-nos definir completamente o comportamento do sistema. Assim, a fim de se obter uma possível representação estado de espaço, definem-se as variáveis de estado como,

$$x_1(t) = x_b(t)$$

$$x_2(t) = \theta(t)$$

$$x_3(t) = \dot{x}_b(t)$$

$$x_4(t) = \dot{\theta}(t)$$

Expressando estas variáveis em termos de vector de estado tem-se,

$$x(t)^T = [x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)] = [x_b(t), \theta(t), \dot{x}_b(t), \dot{\theta}(t)]$$

Pela definição de variáveis de estado obtém-se,

$$\dot{x}_1(t) = x_3(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_4(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = \ddot{x}_b(t)$$

$$\dot{x}_4(t) = \ddot{\theta}(t)$$

Recorrendo às equações (6.3.1) e (6.3.2) e resolvendo-as em ordem a \ddot{x}_b e $\ddot{\theta}$, respectivamente (ver Anexo I) tem-se,

$$\begin{aligned}\ddot{x}_b = & \left(-\frac{(J_p + m_p l_p^2) K_s}{m_m(J_p + m_p l_p^2) + m_p J_p} \right) x_b + \left(-\frac{g l_p^2 m_p^2}{m_m(J_p + m_p l_p^2) + m_p J_p} \right) \theta + \left(\frac{l_p m_p k_g^2 k_m^2}{R_m(m_m(J_p + m_p l_p^2) + m_p J_p)} \right) \dot{\theta} + \\ & + \left(-\frac{l_p m_p k_g k_m}{R_m(m_m(J_p + m_p l_p^2) + m_p J_p)} \right) V_m\end{aligned}\quad (6.3.3)$$

e

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} = & \frac{K_s m_p l_p}{m_m(J_p + m_p l_p^2) + J_p m_p} x_b - \frac{(m_m + m_p) k_g^2 k_m^2}{R_m(m_m(J_p + m_p l_p^2) + J_p m_p)} \dot{\theta} + \frac{(m_m + m_p) k_g k_m}{R_m(m_m(J_p + m_p l_p^2) + J_p m_p)} V_m + \\ & + \frac{(m_m + m_p) g m_p l_p}{m_m(J_p + m_p l_p^2) + J_p m_p} \theta\end{aligned}\quad (6.3.4)$$

Logo,

$$\dot{x}_1 = x_3$$

$$\dot{x}_2 = x_4$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_3 = \ddot{x}_b = & \left(-\frac{(J_p + m_p l_p^2) K_s}{m_m(J_p + m_p l_p^2) + m_p J_p} \right) x_b + \left(-\frac{g l_p^2 m_p^2}{m_m(J_p + m_p l_p^2) + m_p J_p} \right) \theta + \left(\frac{l_p m_p k_g^2 k_m^2}{R_m(m_m(J_p + m_p l_p^2) + m_p J_p)} \right) \dot{\theta} + \\ & + \left(-\frac{l_p m_p k_g k_m}{R_m(m_m(J_p + m_p l_p^2) + m_p J_p)} \right) V_m\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_4 = \ddot{\theta} = & \frac{K_s m_p l_p}{m_m(J_p + m_p l_p^2) + J_p m_p} x_b - \frac{(m_m + m_p) k_g^2 k_m^2}{R_m(m_m(J_p + m_p l_p^2) + J_p m_p)} \dot{\theta} + \frac{(m_m + m_p) k_g k_m}{R_m(m_m(J_p + m_p l_p^2) + J_p m_p)} V_m + \\ & + \frac{(m_m + m_p) g m_p l_p}{m_m(J_p + m_p l_p^2) + J_p m_p} \theta\end{aligned}$$

Expressando em termos matriciais,

$$\frac{\partial}{\partial t} x = Ax + Bu$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{K_s(J_p + m_p l_p^2)}{S} & -\frac{m_p^2 g l_p^2}{S} & 0 & \frac{l_p m_p k_g^2 k_m^2}{R_m S} \\ \frac{m_p l_p K_s}{S} & \frac{m_p g l_p (m_m + m_p)}{S} & 0 & -\frac{(m_m + m_p) k_g^2 k_m^2}{R_m (m_m (J_p + m_p l_p^2) + J_p m_p)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{k_m l_p m_p k_g}{R_m S} \\ \frac{(m_m + m_p) k_g k_m}{R_m S} \end{bmatrix} V_m$$

$$S = m_m J_p + J_p m_p + m_p l_p^2 m_m$$

Em que,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{K_s(J_p + m_p l_p^2)}{S} & -\frac{m_p^2 g l_p^2}{S} & 0 & \frac{l_p m_p K_g^2 k_m^2}{R_m S} \\ \frac{m_p l_p K_s}{S} & \frac{m_p g l_p (m_m + m_p)}{S} & 0 & -\frac{(m_m + m_p) K_g^2 k_m^2}{R_m (m_m (J_p + m_p l_p^2) + J_p m_p)} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{k_m l_p m_p K_g}{R_m S} \\ \frac{(m_m + m_p) K_g k_m}{R_m S} \end{bmatrix}$$

$$u = V_m$$

Admitindo as quantidades x_b e θ como as únicas variáveis passíveis de serem medidas, então,

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_b(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_b(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix}$$

Em que,

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sintetizando, as equações de estado e de saída do sistema são

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Substituindo os valores das variáveis envolvidas no problema (ver Anexo VIII), obtêm-se as seguintes matrizes A, B, C e D para o sistema não controlado,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -48.0 & -0.40 & 0 & 31.8 \\ 86.0 & 18.3 & 0 & -1449.5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5.9 \\ 270.0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

6.4. ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DO SISTEMA EM MALHA ABERTA

Partindo das equações de movimento obtidas no capítulo 6.2 é possível, analiticamente, obter as Funções de Transferência do sistema.

$$\begin{cases} K_s x_b + (m_m + m_p) \ddot{x}_b + m_p l_p \ddot{\theta} = 0 \\ m_p l_p \ddot{x}_b + (J_p + m_p l_p^2) \ddot{\theta} - m_p g \theta l_p = -\frac{k_m^2 k_g^2}{R_m} \dot{\theta} + \frac{k_m k_g}{R_m} V_m \end{cases}$$

Aplicando o conceito de Transformada de Laplace às equações de movimento anteriores, tem-se

$$K_s X_b(s) + (m_m + m_p) s^2 X_b(s) + m_p l_p s^2 \theta(s) = 0 \quad (6.4.1)$$

$$\begin{aligned}
m_p l_p s^2 X_b(s) + (J_p + m_p l_p^2) s^2 \theta(s) - m_p g l_p \theta(s) + \frac{k_m^2 k_g^2}{R_m} s \theta(s) = \\
= \frac{k_m k_g}{R_m} U(s) \quad (6.4.2)
\end{aligned}$$

Através de algumas transformações, ver Anexo VI obtém-se as seguintes Funções de Transferência,

$$\begin{aligned}
\frac{X_b(s)}{U(s)} &= - (C_1 m_p l_p s^2) \times \\
&\times \left[\left(J_p (m_m + m_p) + l_p^2 m_m m_p \right) s^4 + C_2 (m_m + m_p) s^3 + \left((J_p + l_p^2 m_p) K_s - g l_p (m_m + m_p) m_p \right) s^2 + \right. \\
&\left. + C_2 K_s s - g K_s l_p m_p \right]^{-1} \\
\frac{\theta(s)}{U(s)} &= - \left(C_1 K_s + C_1 (m_m + m_p) s^2 \right) \times \\
&\times \left[\left(J_p (m_m + m_p) + l_p^2 m_m m_p \right) s^4 + C_2 (m_m + m_p) s^3 + \left((J_p + l_p^2 m_p) K_s - g l_p (m_m + m_p) m_p \right) s^2 + \right. \\
&\left. + C_2 K_s s - g K_s l_p m_p \right]^{-1}
\end{aligned}$$

Substituindo as variáveis,

$$\frac{X_b(s)}{U(s)} = \frac{-5.919 s^2}{s^4 + 1449 s^3 + 29.76 s^2 + 6.69 \times 10^4 s - 843.5} \quad (6.4.3)$$

$$\frac{\theta(s)}{U(s)} = \frac{270s^2 + 1.24 \times 10^4}{s^4 + 1449s^3 + 29,76s^2 + 6.69 \times 10^4s - 843.5} \quad (6.4.4)$$

Recorrendo à função “tf” do MATLAB é, igualmente, possível obter as Funções de Transferência do sistema que, neste caso, resultaram idênticas às calculadas analiticamente.

6.5. ANÁLISE DA ESTABILIDADE DO SISTEMA

Sendo a equação característica do sistema

$$s^4 + 1449s^3 + 29,76s^2 + 6.69 \times 10^4s - 843.5 = 0$$

os pólos do sistema não controlado anulam o denominador das Funções de Transferência, ou seja, são os zeros da equação característica.

Na representação em Espaço de Estado os pólos são os valores próprios da matriz A.

Assim,

$$pólos = \begin{bmatrix} 0.0126 \\ -6.50 \times 10^{-4} + 6.79i \\ -6.50 \times 10^{-4} - 6.79i \\ -1449.5 \end{bmatrix}$$

Os pólos e os zeros estão representados no diagrama seguinte

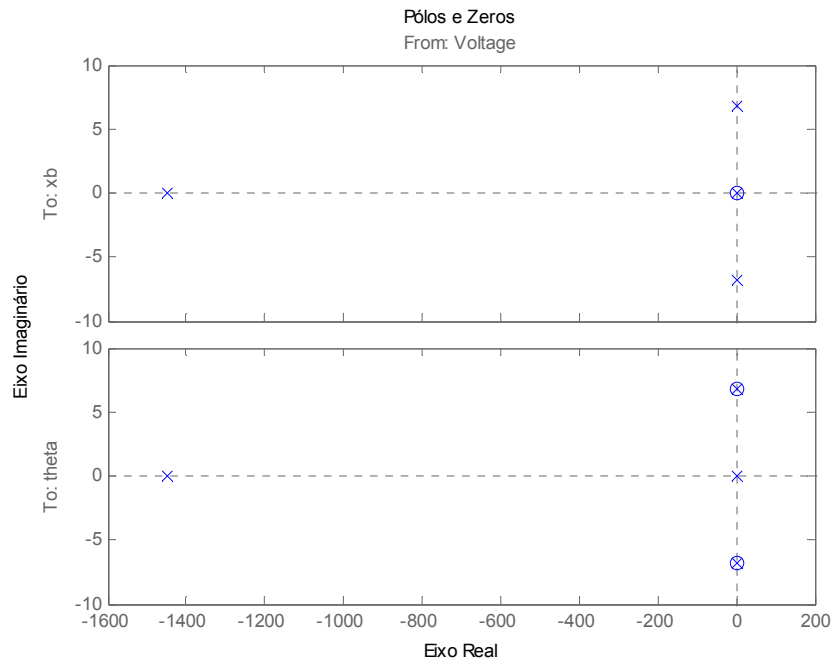


Figura 6.6 - Representação dos pólos e zeros para o sistema em malha aberta

sendo que os pólos estão representados com “×” e os zeros com “O”.

A fim de se ter uma melhor percepção dos valores próximos da origem, seguidamente apresenta-se uma imagem amplificada do gráfico anterior em torno do ponto (0,0).

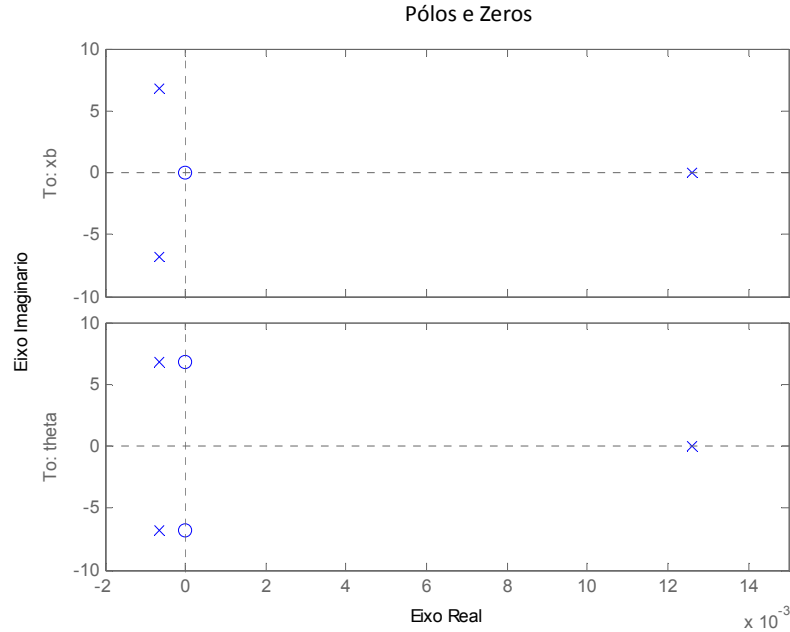


Figura 6.7 - Representação dos pólos e zeros, próximos da origem, para o sistema em malha aberta

Como se pode observar, nem todos os pólos do sistema estão situados à esquerda do eixo imaginário, logo, como referido no capítulo 5.2, o sistema é considerado instável.

6.6. ANÁLISE DA CONTROLABILIDADE

O primeiro passo num dimensionamento de um controlador é saber se o sistema é ou não controlável. Para isso, tal como mencionado no capítulo 5.1, é necessário obter a matriz de controlabilidade,

$$C_r = [B \ AB \ A^2B \ A^3B] = \begin{bmatrix} 0 & -5.92 & 8.58 \times 10^3 & -1.24 \times 10^7 \\ 0 & 2.70 \times 10^2 & -3.91 \times 10^5 & 5.67 \times 10^8 \\ -5.92 & 8.58 \times 10^3 & -1.24 \times 10^7 & 1.80 \times 10^{10} \\ 2.70 \times 10^2 & -3.91 \times 10^5 & 5.67 \times 10^8 & -8.22 \times 10^{11} \end{bmatrix}$$

A característica de C_r é 4, logo o sistema é completamente controlável.

Sendo o sistema instável e controlável, o passo seguinte é o dimensionamento do controlador.

6.7. CONTROLO EM MALHA FECHADA COM REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS

Seja o sistema definido no Espaço de Estado

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

pretende-se dimensionar um controlador com a seguinte lei

$$u = -Kx$$

com o objectivo de reduzir o deslocamento do elemento flexível no menor tempo possível, ou seja, reduzir o tempo de assentamento ao mesmo tempo que se reduz o esforço de controlo.

O diagrama de blocos para o sistema em estudo é apresentado na Figura 6.8.

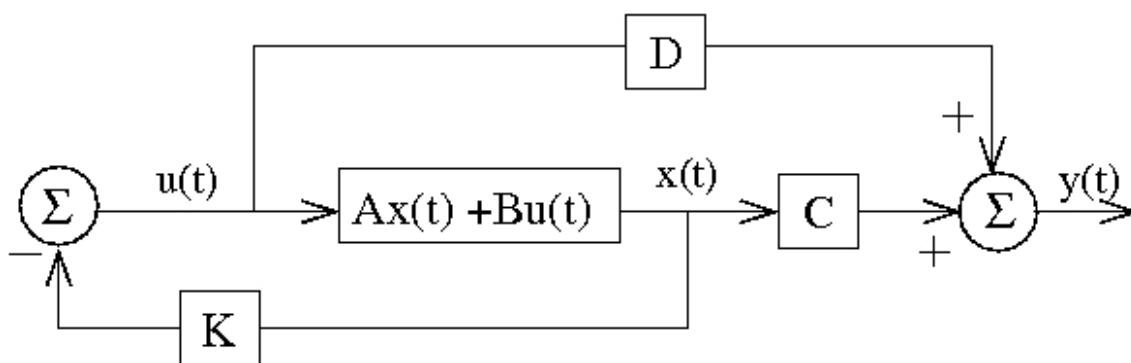


Figura 6.8 - Controlador com realimentação total dos estados (sem perturbação e sem sinal de controlo)

Onde K representa os ganhos calculados e são designados do seguinte modo,

$$K = [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4] = [k_{p,x} \quad k_{p,\theta} \quad k_{d,x} \quad k_{d,\theta}]$$

Num sistema controlado a matriz A equivalente é $A - KB$. Assim, é necessário determinar o valor de K . Seguidamente será apresentado o procedimento a adoptar para a sua determinação.

6.7.1. Determinação dos Parâmetros Q e R

Tendo por base os seguintes valores para Q e R (referenciados no manual do equipamento),

$$Q_{orig} = \begin{bmatrix} 250000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_{orig} = 10$$

Os ganhos correspondentes são,

$$k_{p,x} = -153.21 \left[\frac{V}{m} \right]$$

$$k_{p,\theta} = 10.07 \left[\frac{V}{rad} \right]$$

$$k_{d,x} = 6.00 \left[\frac{V}{(m/s)} \right]$$

$$k_{d,\theta} = 0.14 \left[\frac{V}{(rad/s)} \right]$$

Para os valores de K determinados acima, os pólos são obtidos através da determinação dos valores próprios da matriz $A - KB$,

$$pólos = \begin{bmatrix} -1449.6 \\ -0.3 + 6.8i \\ -0.3 - 6.8i \\ -1.9 \end{bmatrix}$$

Nas imagens seguintes encontram-se representados os pólos do sistema original e do sistema controlado,

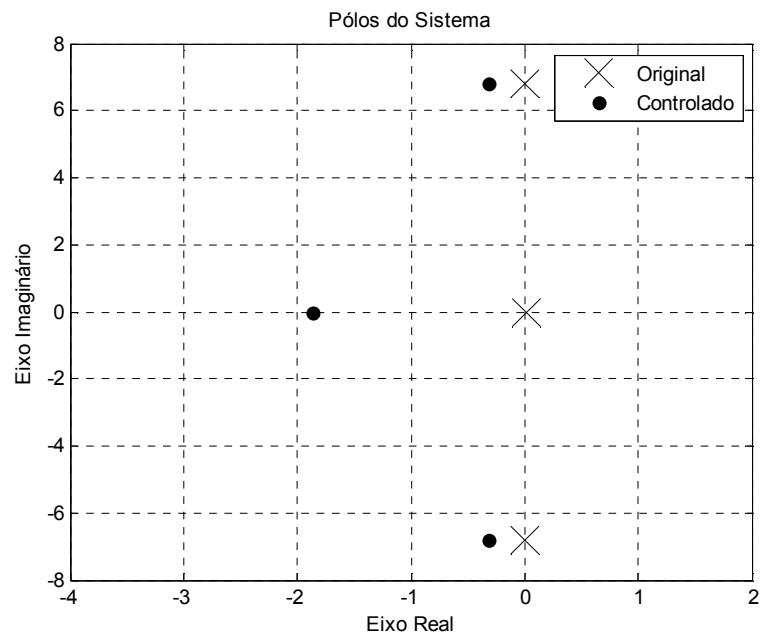


Figura 6.9 - Comparação dos pólos para o sistema controlado e não controlado (1)

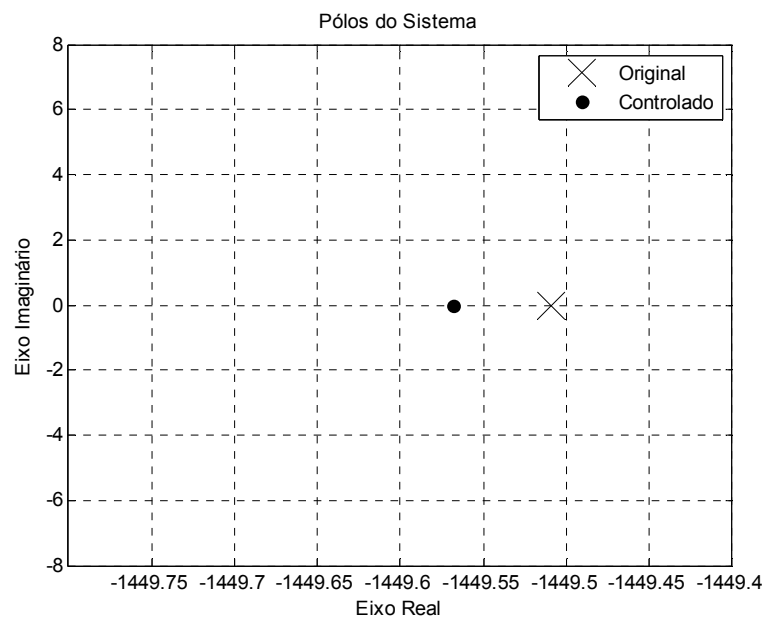


Figura 6.10 - Comparação dos pólos para o sistema controlado e não controlado (2)

Como se pode observar, com a introdução de um controlador, todos os pólos apresentam parte real negativa, ou seja, o sistema passa a ser estável.

6.8. ANÁLISE DA RESPOSTA DO SISTEMA CONTROLADO

As simulações apresentadas neste capítulo foram efectuadas no programa MATLAB, e os códigos respectivos encontram-se no Anexo VII.

6.8.1. Resposta da Estrutura Controlada a uma Acção do Tipo Degrau Unitário

A resposta da estrutura controlada, a uma acção do tipo degrau unitário, está representada na Figura 6.11.

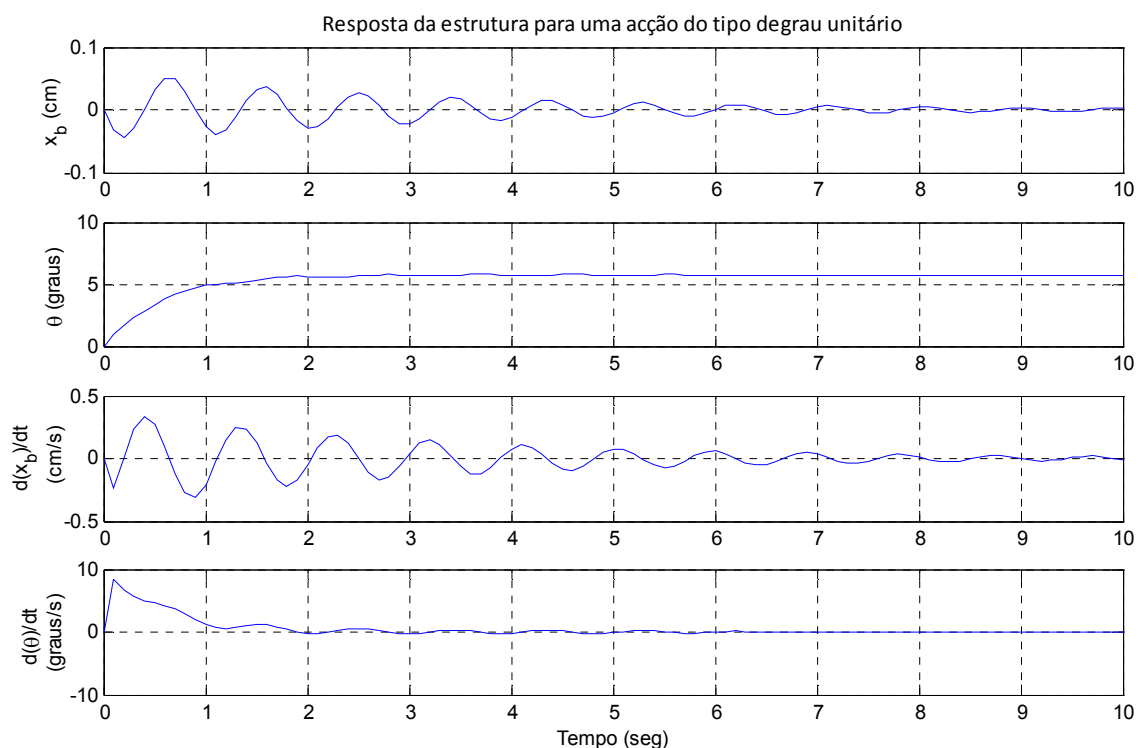


Figura 6.11 - Resposta da estrutura controlada para uma acção do tipo degrau unitário

Comparando a resposta do sistema controlado obtida na Figura 6.11 para x_b e θ com a resposta do sistema não controlado obtida na Figura 6.5 (modelo linear), observa-se, claramente, a eficiência do efeito do controle

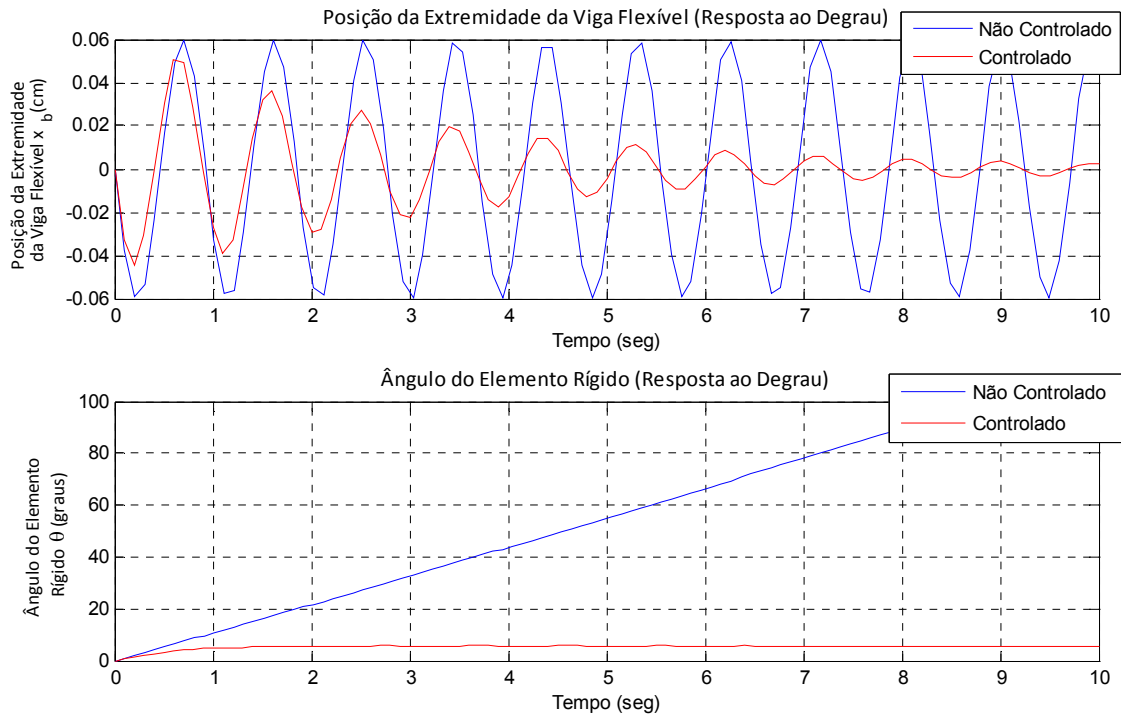


Figura 6.12 - Comparação da resposta do sistema controlado e não controlado para uma ação do tipo degrau

6.8.2. Resposta da Estrutura Controlada a Condições Iniciais

Estudando, agora, o comportamento da estrutura para condições iniciais como, por exemplo,

$$x_b(0) = 2 \text{ cm}$$

$$\theta(0) = 0^\circ$$

ou seja, impondo um deslocamento de 2 cm no topo da viga flexível, mantendo o elemento rígido na posição vertical. A resposta do sistema controlado encontra-se representada na Figura 6.13,

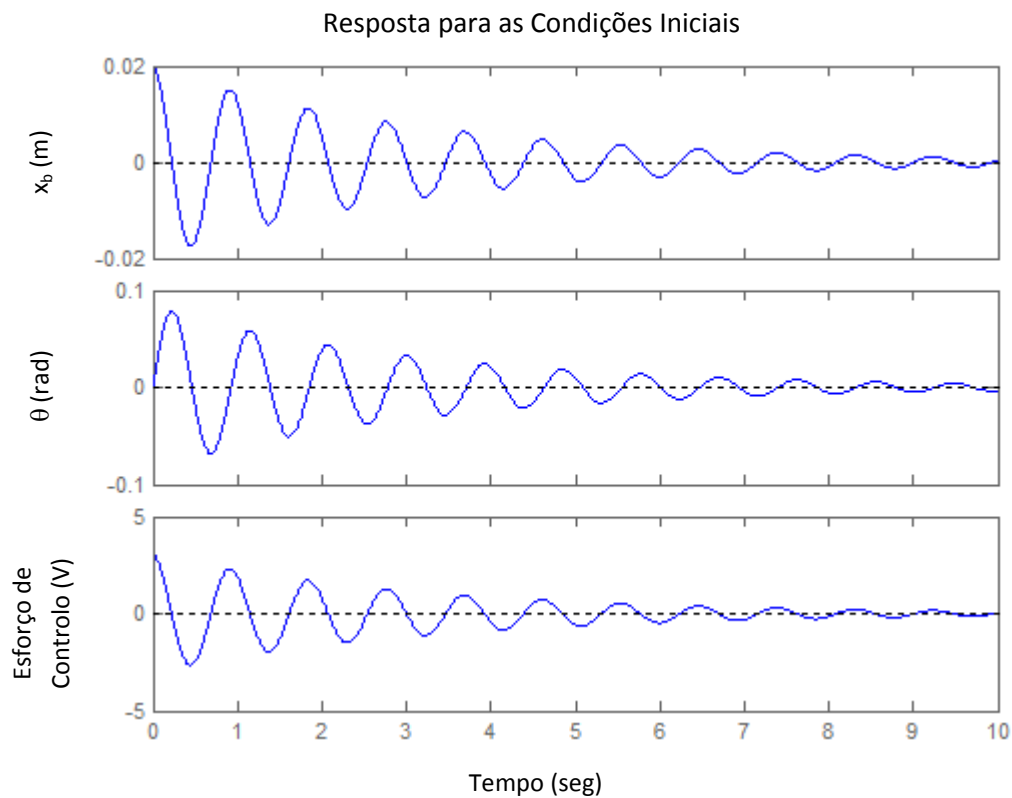


Figura 6.13 - Resposta da estrutura controlada para condições iniciais

6.8.3. Resposta da Estrutura Controlada a uma Perturbação

Ao impor ao sistema a perturbação apresentada na Figura 6.14, utilizando ainda os valores de Q_{orig} e R_{orig} para o algoritmo de controlo, obtém-se a seguinte resposta no tempo

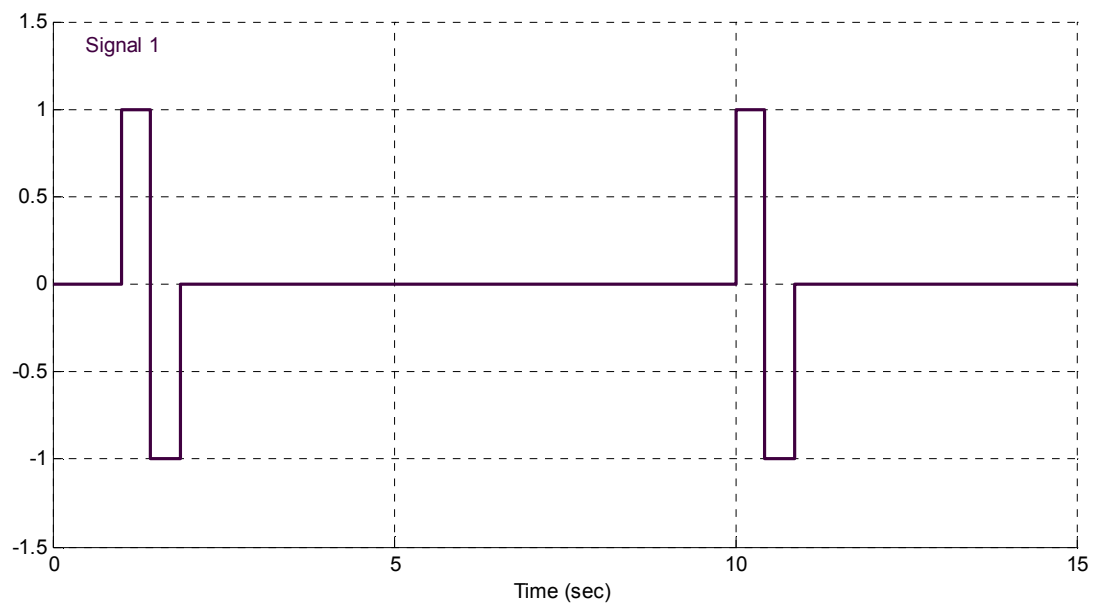


Figura 6.14 - Perturbação

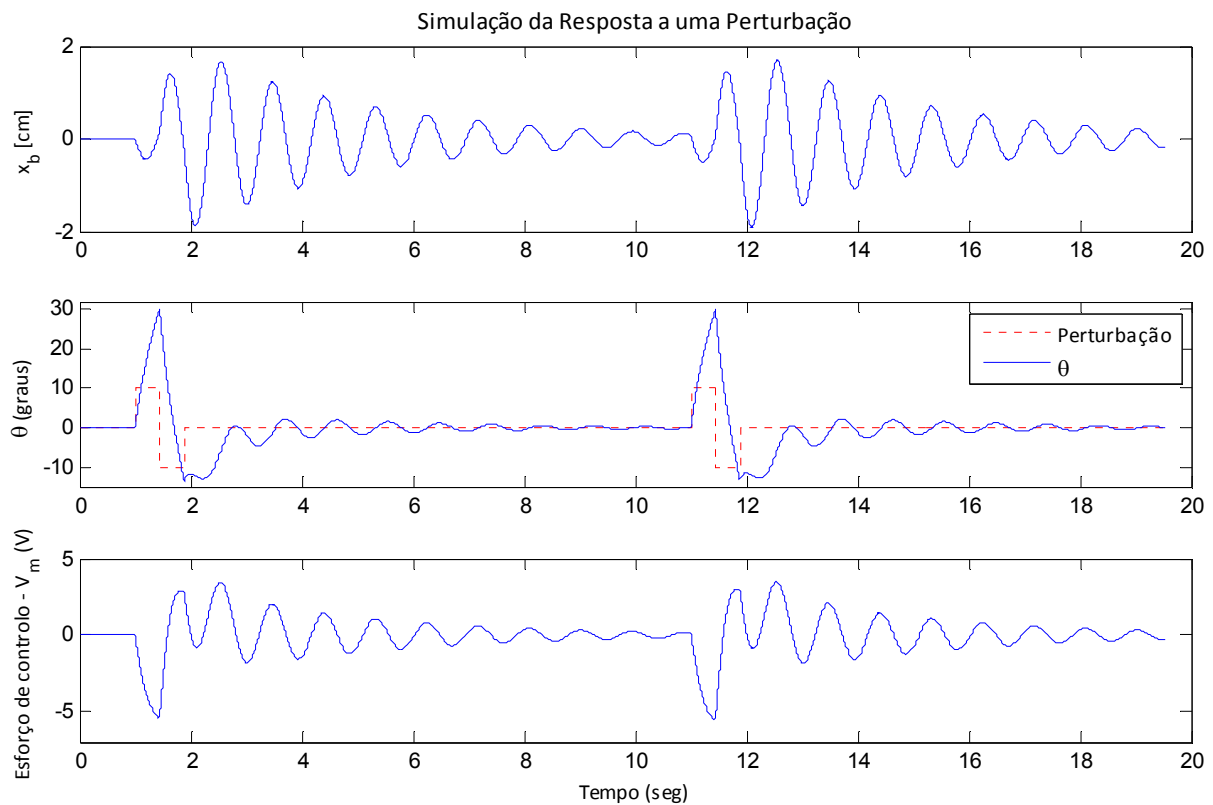


Figura 6.15 - Resposta da estrutura a uma perturbação externa

No gráfico da Figura 6.15 pode-se observar o comportamento da estrutura mediante perturbações que lhe vão sendo impostas. Em $t = 1$ s, aproximadamente, é aplicada uma perturbação ao sistema e a estrutura começa a oscilar. A partir desse momento o sistema responde e observa-se o efeito de controlo. Em $t = 11$ s, aproximadamente, uma nova perturbação é imposta à estrutura e o processo repete-se.

6.9. AJUSTE DOS PARÂMETROS Q E R

Como já foi referido anteriormente, a escolha dos parâmetros Q e R deve ser feita por tentativa e erro. Assim, para além de Q_{orig} e R_{orig} , existem diversas outras opções que terão que ser estudadas para se obter uma resposta final, tão próxima quanto possível, daquela que se pretende atingir.

Neste caso, modificando isoladamente cada um deles, (Q (1,1), Q (2,2) e R (1,1)), efectuaram-se diversas simulações em MATLAB, aplicando uma acção do tipo degrau

unitário, para analisar a influência que esses mesmos parâmetros teriam na resposta do sistema.

➤ Influência de $Q(1,1)$ na saída do sistema

Foram feitas várias simulações, variando o valor de $Q(1,1)$ de 15625 até 1265625, mantendo os outros parâmetros constantes. Tendo como ponto de partida 250000, como mencionado acima, foram feitos incrementos de 50%, somando ou subtraindo, até atingir os valores limites.

Nestes ensaios, com o aumento do valor de Q_1 , esperava-se um decréscimo do valor de pico de x_b e uma pequena diminuição do valor de pico de θ , bem como do tempo demorado para se atingir esse valor.

O tempo de assentamento de x_b diminuiu consideravelmente com o aumento de Q_1 , enquanto que o tempo de assentamento de θ manteve-se, relativamente, constante.

No que respeita ao esforço de controlo, com o aumento do valor de $Q(1,1)$, este apresenta um ligeiro aumento, não sendo significativo.

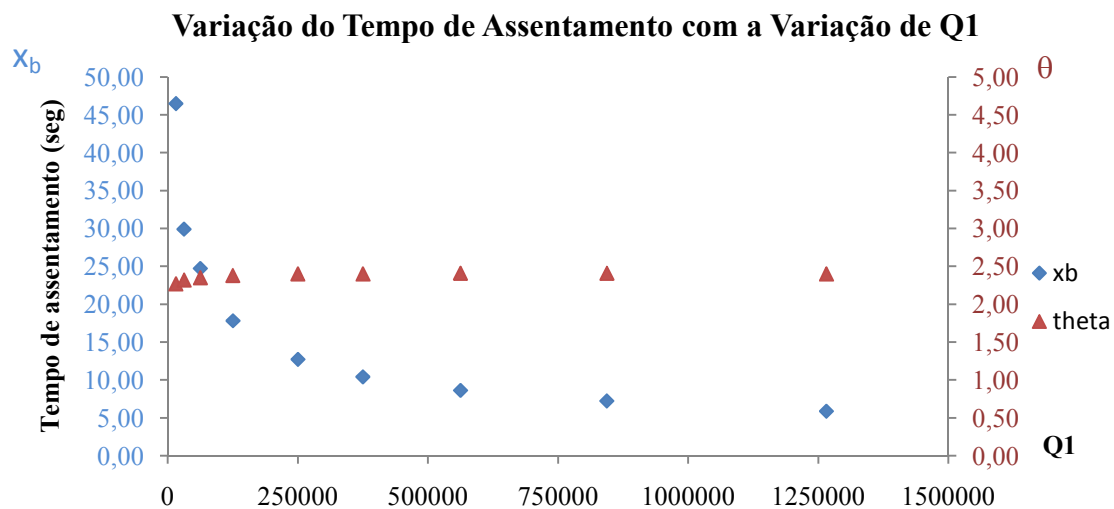


Figura 6.16 - Variação do tempo de assentamento com a variação de $Q(1,1)$

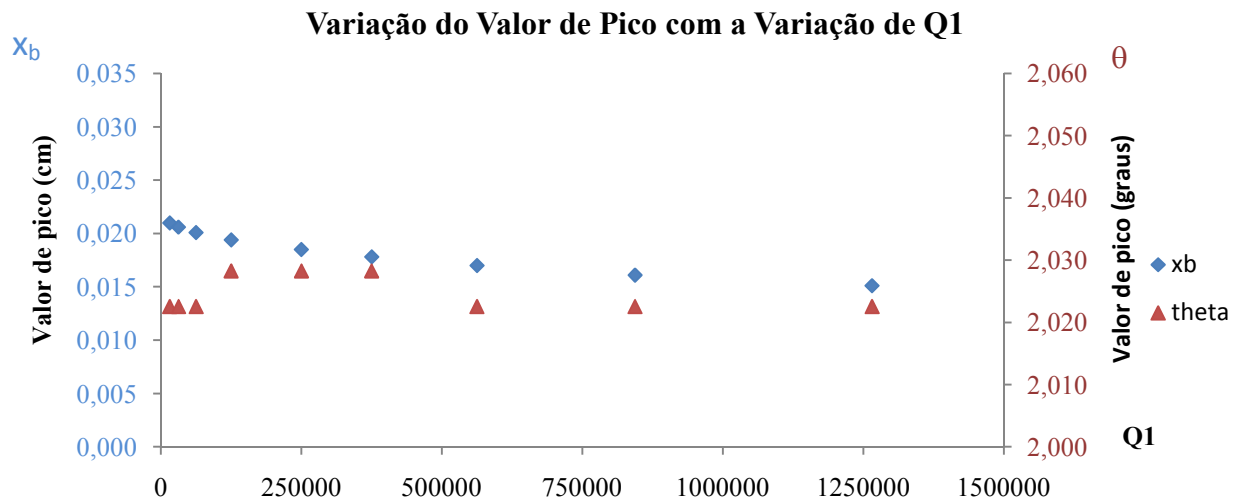


Figura 6.17 - Variação do valor de pico com a variação de Q (1,1)

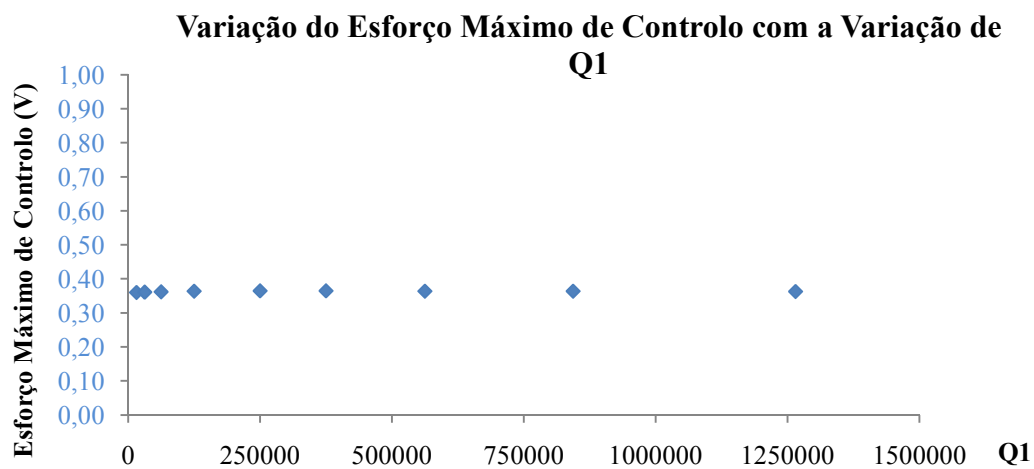


Figura 6.18 - Variação do esforço máximo de controlo com a variação de Q (1,1)

➤ Influência de Q (2,2) na saída do sistema

Foi usado igual procedimento ao anterior, mas desta vez fazendo variar apenas o valor de Q2. Estes estiveram compreendidos entre 250 e 5062,5.

Com o aumento de Q_2 os valores de pico de x_b e de θ sofreram aumentos progressivos, e ambos os tempos de pico diminuíram.

Relativamente ao tempo de assentamento, observa-se na Figura 6.19, um ligeiro aumento no caso de x_b e uma diminuição no caso de θ .

Com o incremento de Q (2,2), o esforço de controlo sofre um ligeiro aumento.

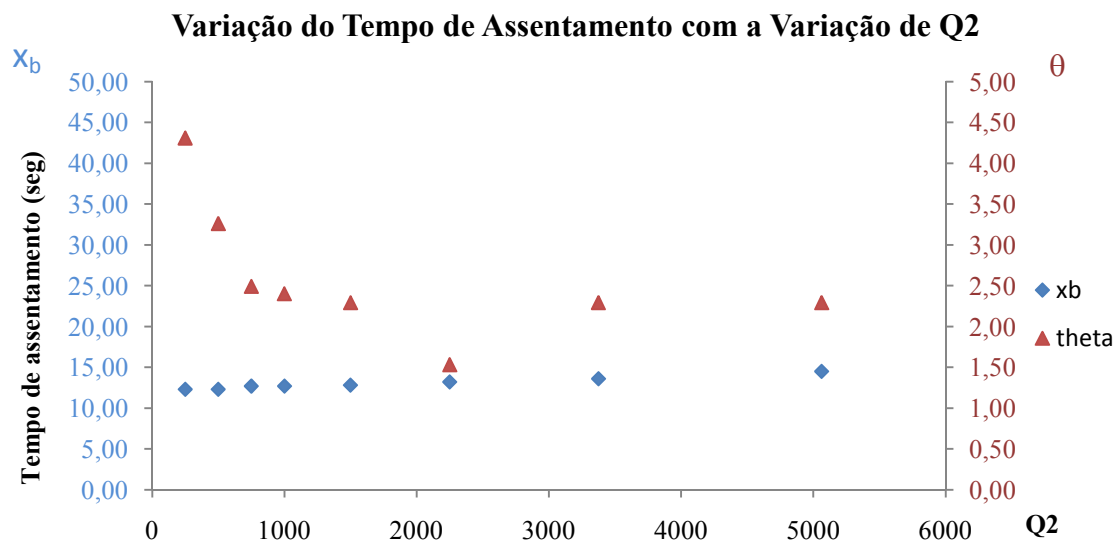


Figura 6.19 - Variação do tempo de assentamento com a variação de Q (2,2)

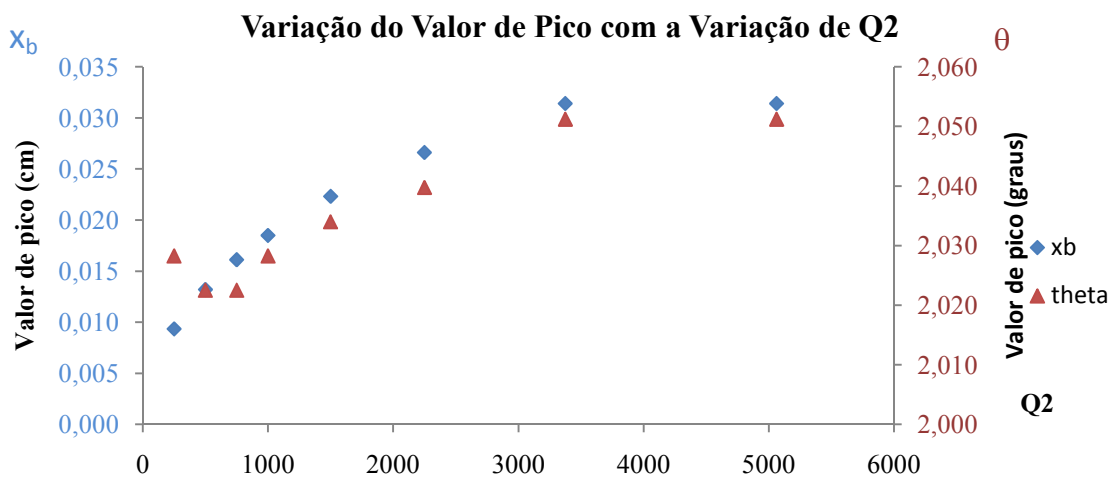


Figura 6.20 - Variação do valor de pico com a variação de Q (2,2)

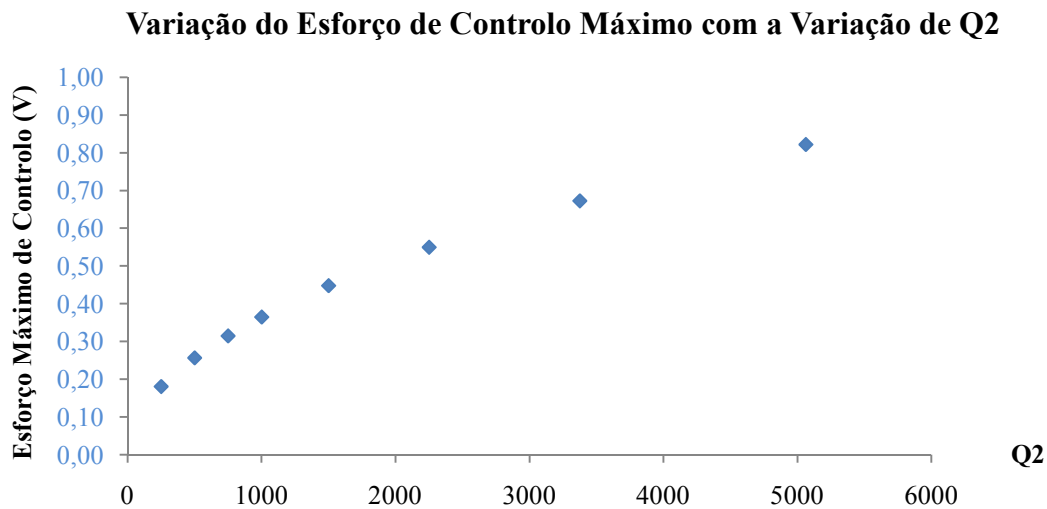


Figura 6.21 - Variação do esforço máximo de controle com a variação de Q2

➤ Influência de R (1,1) na saída do sistema

As simulações foram feitas para valores de R (1,1) compreendidos entre 2 e 30.

Ao incrementar o valor de R (1,1), os valores dos tempos de assentamento para x_b e θ aumentaram também, tendo-se verificado um aumento mais significativo para x_b .

Ambos os valores de pico diminuíram com o aumento de R (1,1).

O esforço de controle foi o parâmetro que mais alteração sofreu com o aumento de R(1,1), apresentando um decréscimo bastante acentuado.

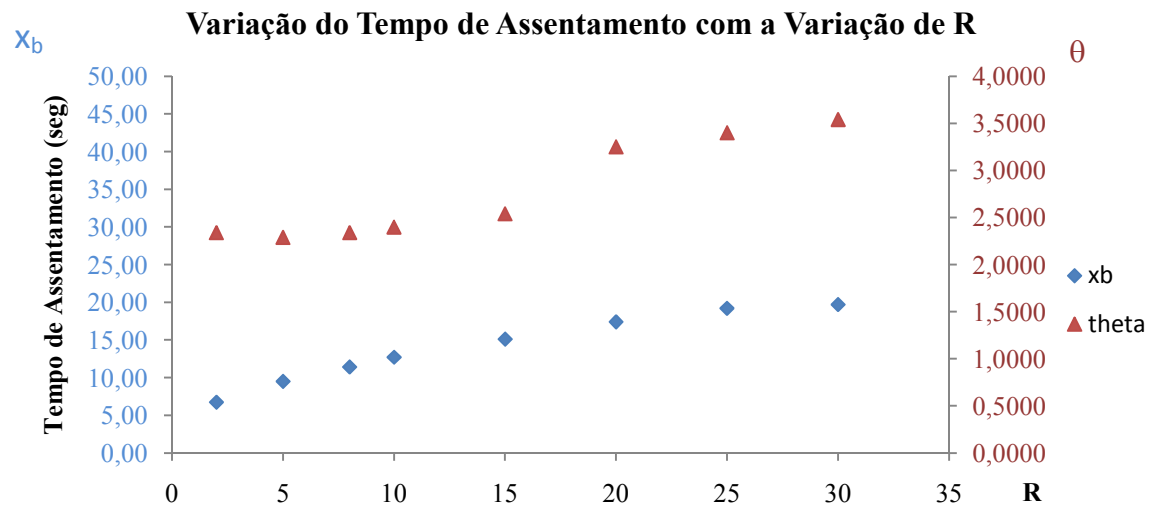


Figura 6.22 - Variação do tempo de assentamento com a variação de R (1,1)

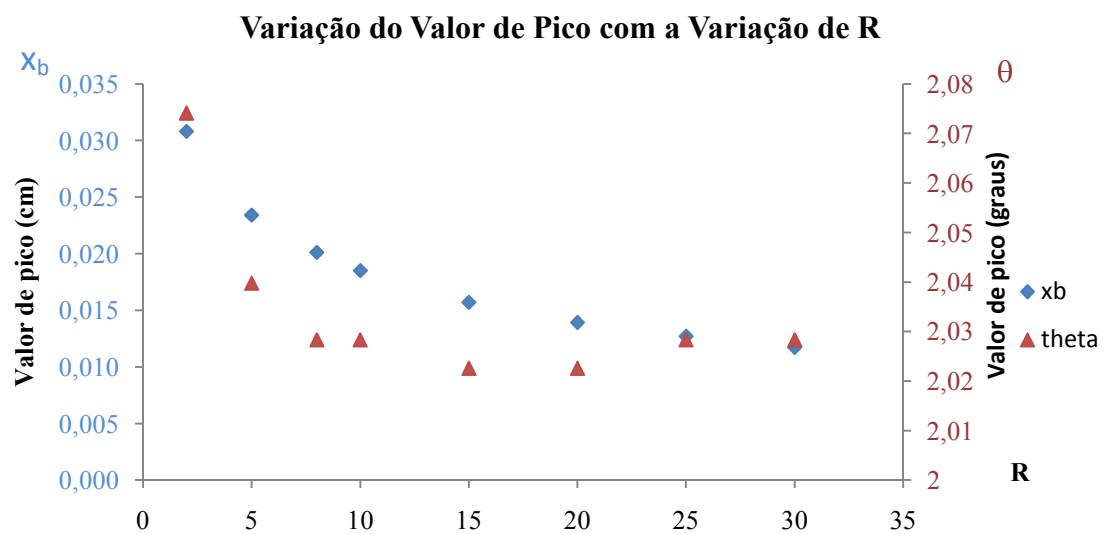


Figura 6.23 - Variação do valor de pico com a variação de R (1,1)

Variação do Esforço Máximo de Controle com a Variação de R

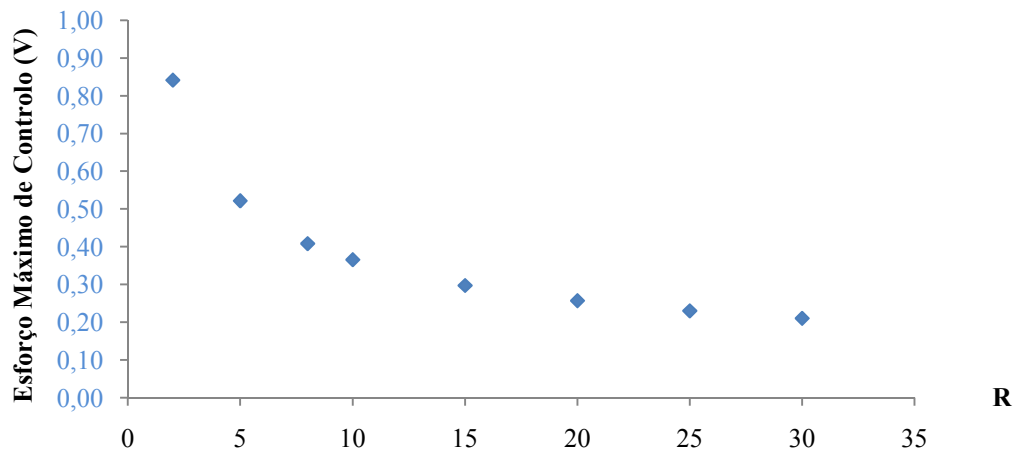


Figura 6.24 - Variação do esforço máximo de controle com a variação de R (1,1)

Os valores de $Q(3,3)$ e $Q(4,4)$ estão directamente relacionados com os estados \dot{x}_b e $\dot{\theta}$, respectivamente. Neste caso, como não foi imposta nenhuma condição em termos de velocidades de saída das variáveis, estes parâmetros não são relevantes para este estudo. Contudo, visto que a força do motor está dependente do parâmetro $\dot{\theta}$, como se pode verificar através da expressão (6.1.3), foram feitas algumas simulações alterando o parâmetro $Q(4,4)$ a fim de se verificar se este teria alguma influência nos estados x_b e θ .

Observou-se, assim, que o aumento de $Q(4,4)$ provoca igualmente um aumento nos tempos de assentamento de x_b e θ , e o esforço de controle permanece relativamente inalterado.

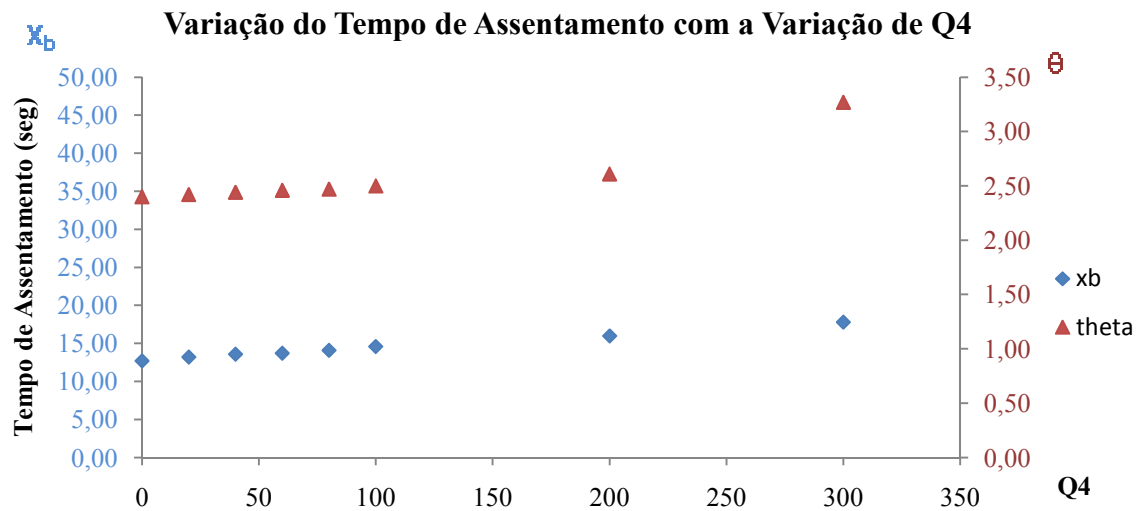


Figura 6.25 - Variação do tempo de assentamento com a variação de Q (4,4)

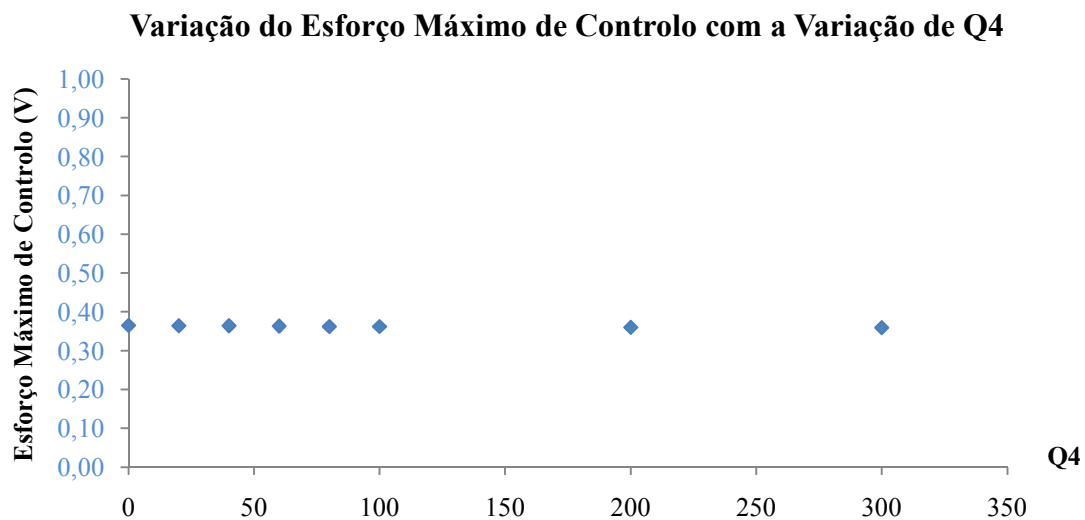


Figura 6.26 - Variação do esforço máximo de controlo com a variação de Q (4,4)

Como conclusão geral destas simulações, é notória a dificuldade em ajustar os valores das matrizes Q e R para se obter a solução óptima.

A dificuldade reside no facto de,

- ao aumentar Q (2,2), o valor do tempo de assentamento de θ diminui (desejável), porém, o tempo de assentamento de x_b e o esforço de controlo aumentam (não desejável);
- ao aumentar R (1,1), o valor do tempo de assentamento de x_b aumenta (não desejável), porém, o esforço de controlo diminui (desejável);

Em relação ao parâmetro Q (1,1), não constitui nenhum obstáculo visto que o aumento do seu valor apenas se reflecte na diminuição do tempo de assentamento de x_b o que é, de todo, desejável.

De igual modo, o aumento do valor de Q (4,4) não constitui obstáculo visto que o aumento do seu valor dá origem a um aumento dos tempos de assentamento e mantém o esforço de controlo relativamente constante.

Sendo o objectivo diminuir o tempo de assentamento de x_b e o esforço de controlo envolvido no processo, teria que se estabelecer um compromisso entre os valores de Q e R , de tal modo que se conseguisse chegar a uma resposta desejável da estrutura.

Para ilustrar essa dificuldade fizeram-se algumas simulações no programa SIMULINK para algumas combinações de Q e R , e os ganhos associados a cada uma delas.

As respostas apresentadas foram obtidas através da aplicação de uma acção do tipo degrau unitário, Figura 6.27, e com base no diagrama apresentado na Figura 6.28.

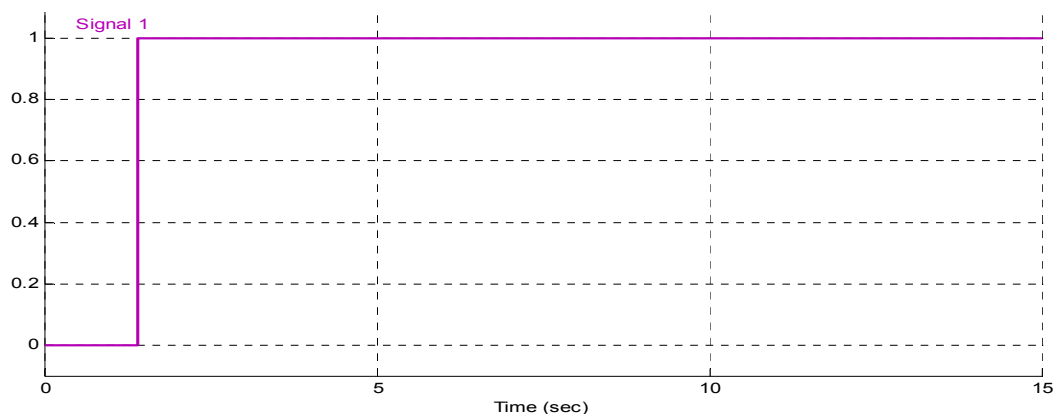


Figura 6.27 - Sinal degrau unitário

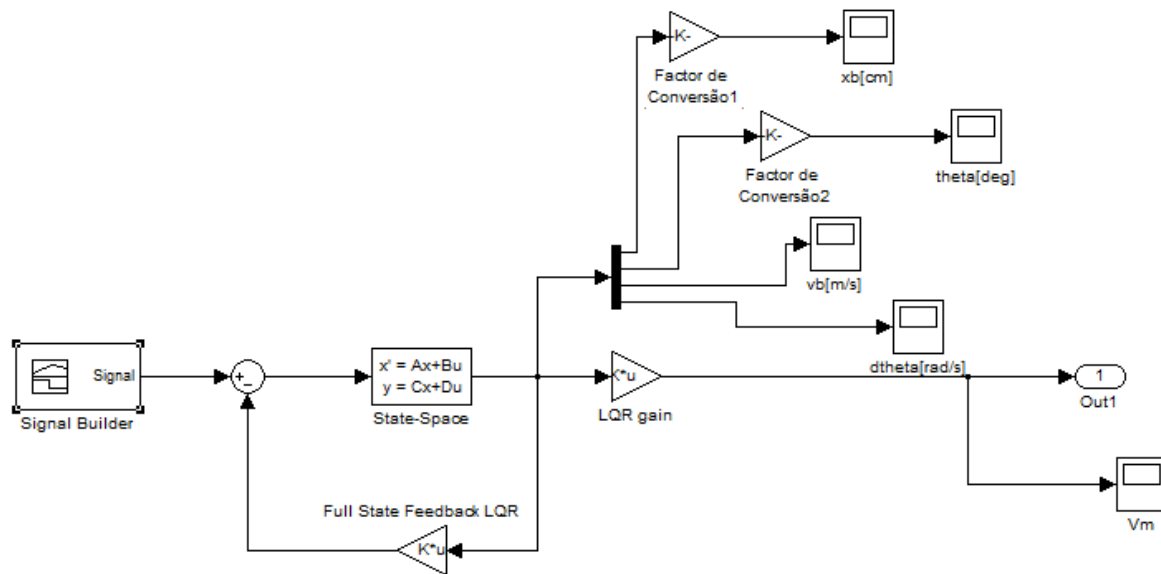
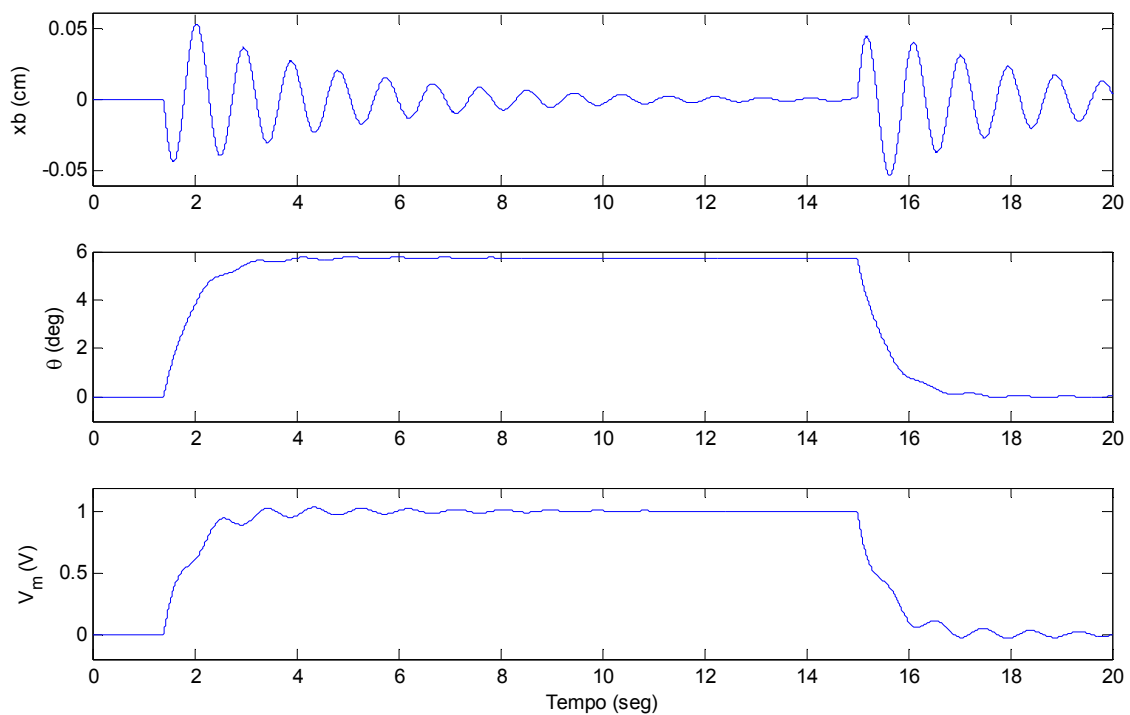


Figura 6.28 - Diagrama de blocos utilizado na simulação em SIMULINK

Caso 1

$$Q_{orig} = \begin{bmatrix} 250000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R_{orig} = 10$$

$$K = [-153.21 \quad 10.07 \quad 6.00 \quad 0.14]$$

Figura 6.29 - Resposta do sistema a uma acção do tipo degrau unitário para Q_{orig} e R_{orig}

Caso 2

Optou-se por aumentar Q1 para 800000 sem alterar os outros parâmetros visto que, através da Figura 6.16, observa-se uma diminuição considerável do tempo de assentamento de x_b , enquanto que o tempo de assentamento de θ mantém-se relativamente constante.

$$Q2 = \begin{bmatrix} 800000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R2 = 10$$

$$K2 = [-273.62 \ 10.07 \ 10.60 \ 0.24]$$

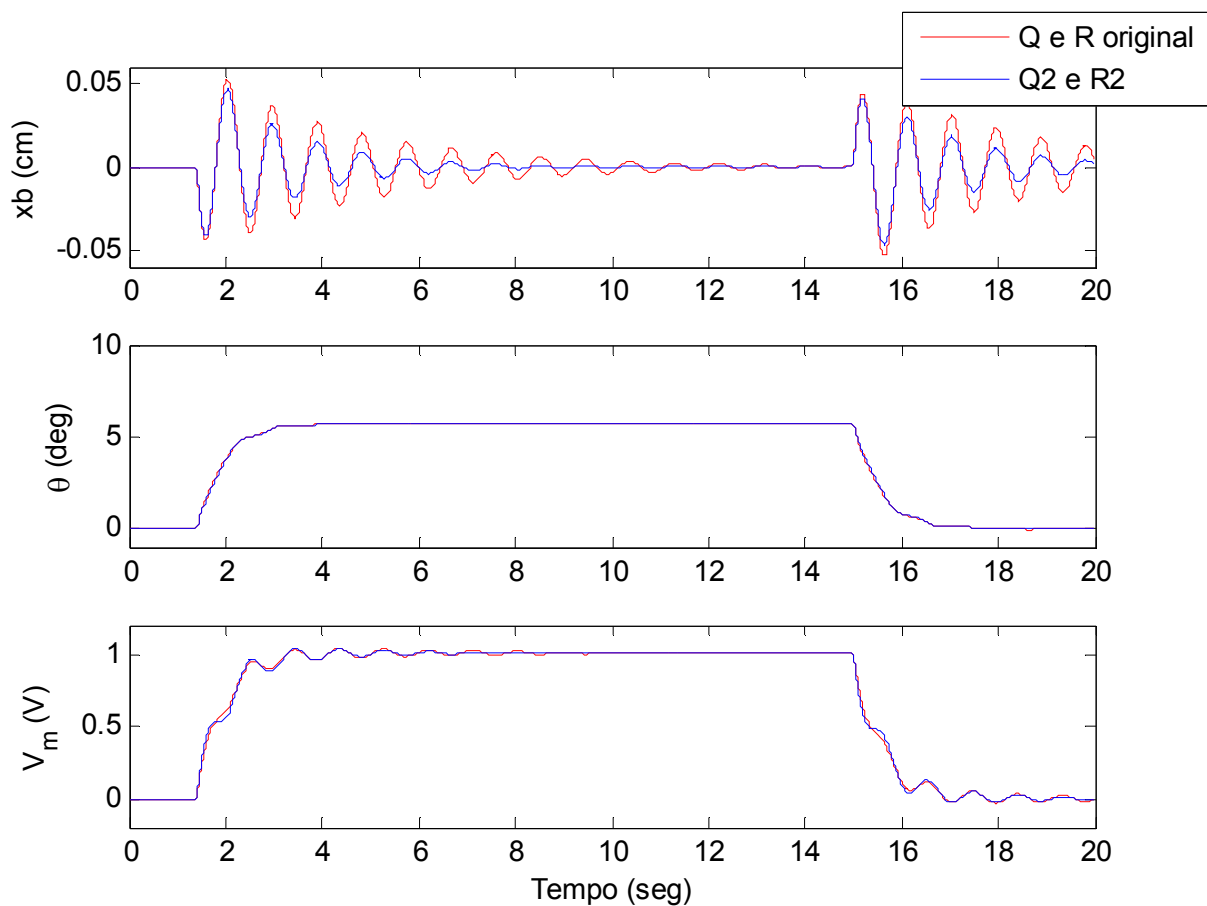


Figura 6.30 - Resposta do sistema a uma acção do tipo degrau unitário para Q2 e R2

Por observação da Figura 6.30 constata-se, tal como o previsto, uma diminuição no tempo de assentamento de x_b . Para o tempo de assentamento de θ e para o esforço de controlo não se obtiveram alterações significativas.

É de salientar o facto da duração do sinal imposto, Figura 6.27, ser apenas de 15 segundos e a análise da resposta no tempo prolongar-se até 20 segundos.

Caso 3

Aumentou-se Q2 para 2200 sem alterar os outros parâmetros visto que, através da Figura 6.19, observa-se que, aproximadamente, neste ponto o tempo de assentamento de θ apresenta valor mais baixo, enquanto que o tempo de assentamento de x_b mantém-se relativamente constante. Espera-se, igualmente, uma diminuição no esforço de controlo.

$$Q3 = \begin{bmatrix} 250000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2200 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R3 = 10$$

$$K3 = [-147.48 \ 14.90 \ 8.56 \ 0.20]$$

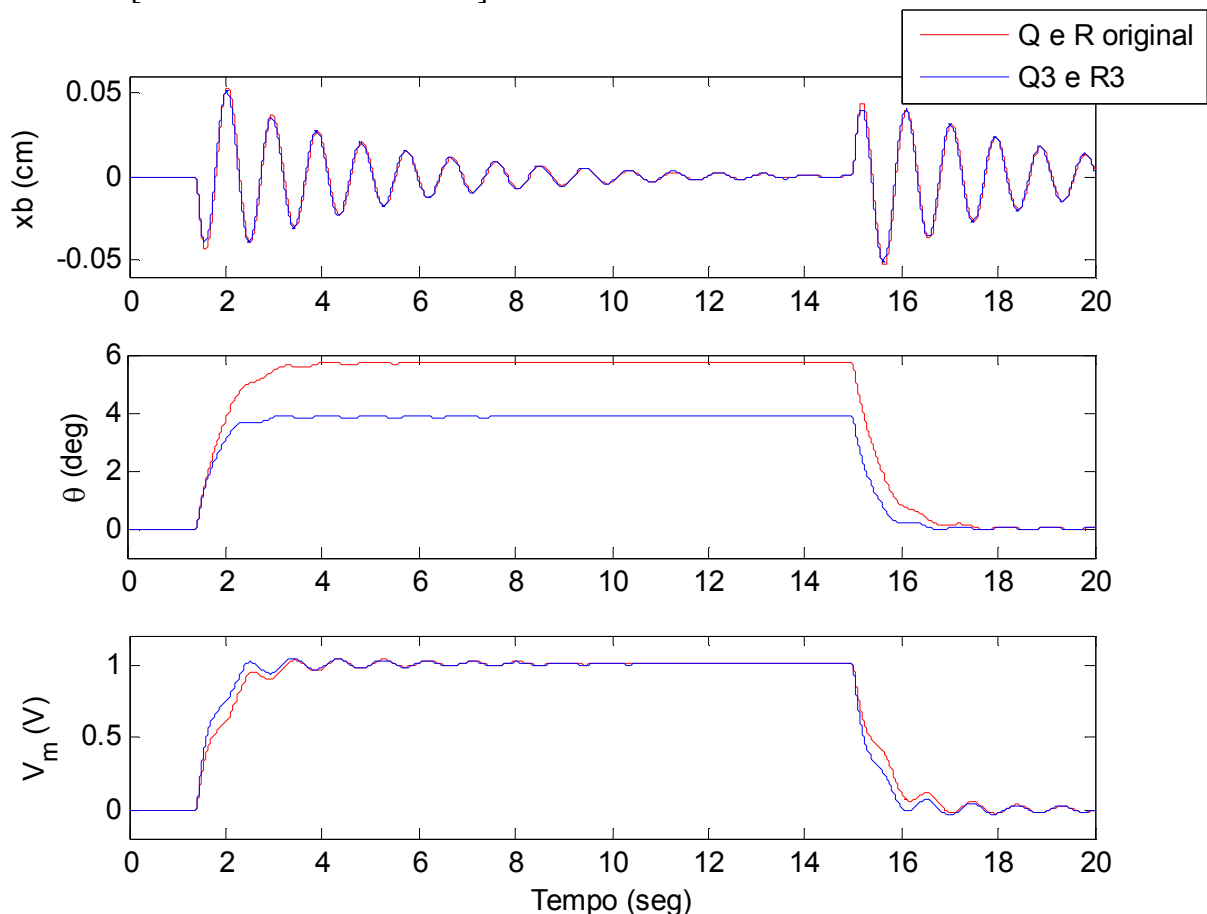


Figura 6.31 - Resposta do sistema a uma acção do tipo degrau unitário para Q3 e R3

Por observação da Figura 6.31 observa-se, ao contrário do que era previsto, que o valor do tempo de assentamento de θ , bem como o tempo de assentamento x_b , permanecem relativamente inalterados. O mesmo se verifica para o esforço de controlo.

Caso 4

Aumentou-se Q_4 para 200 sem alterar os outros parâmetros pois, como foi referido no capítulo 6.7, espera-se um ligeiro aumento nos tempos de assentamento de x_b e θ , porém, uma diminuição no esforço de controlo.

$$Q_4 = \begin{bmatrix} 250000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 200 \end{bmatrix} \quad R_4 = 10$$

$$K_4 = [-155.29 \ 10.07 \ 4.70 \ 1.73]$$

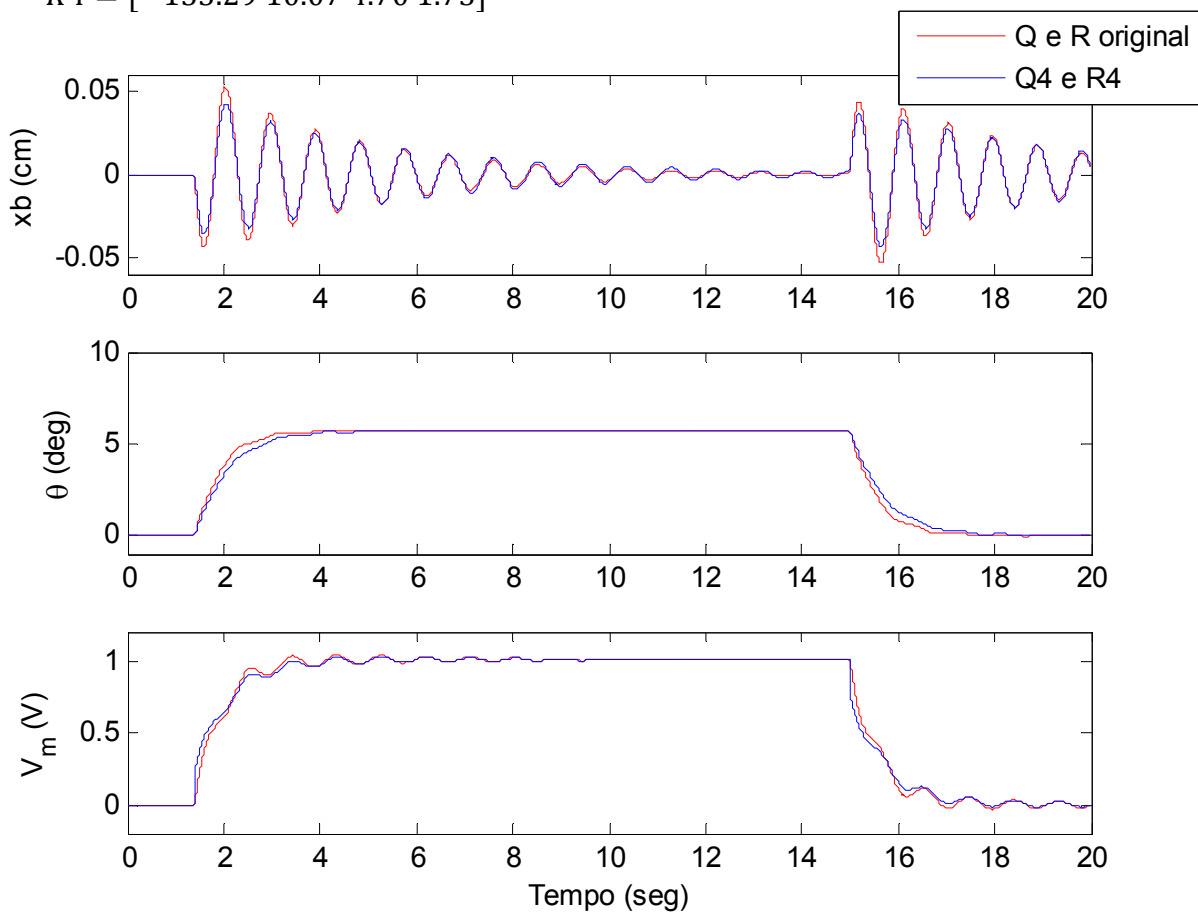


Figura 6.32 - Resposta do sistema a uma acção do tipo degrau unitário para Q_4 e R_4

Não se observou, com aumento do valor de Q4, nenhuma alteração significativa na resposta do sistema.

Caso 5

Aumentou-se o valor de R para 25 sem alterar os outros parâmetros esperando, assim, um ligeiro aumento nos tempos de assentamento de x_b e θ , porém, uma diminuição significativa no esforço de controlo.

$$Q5 = \begin{bmatrix} 250000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R5 = 25$$

$$K5 = [-98.76 \ 6.39 \ 2.44 \ 0.06]$$

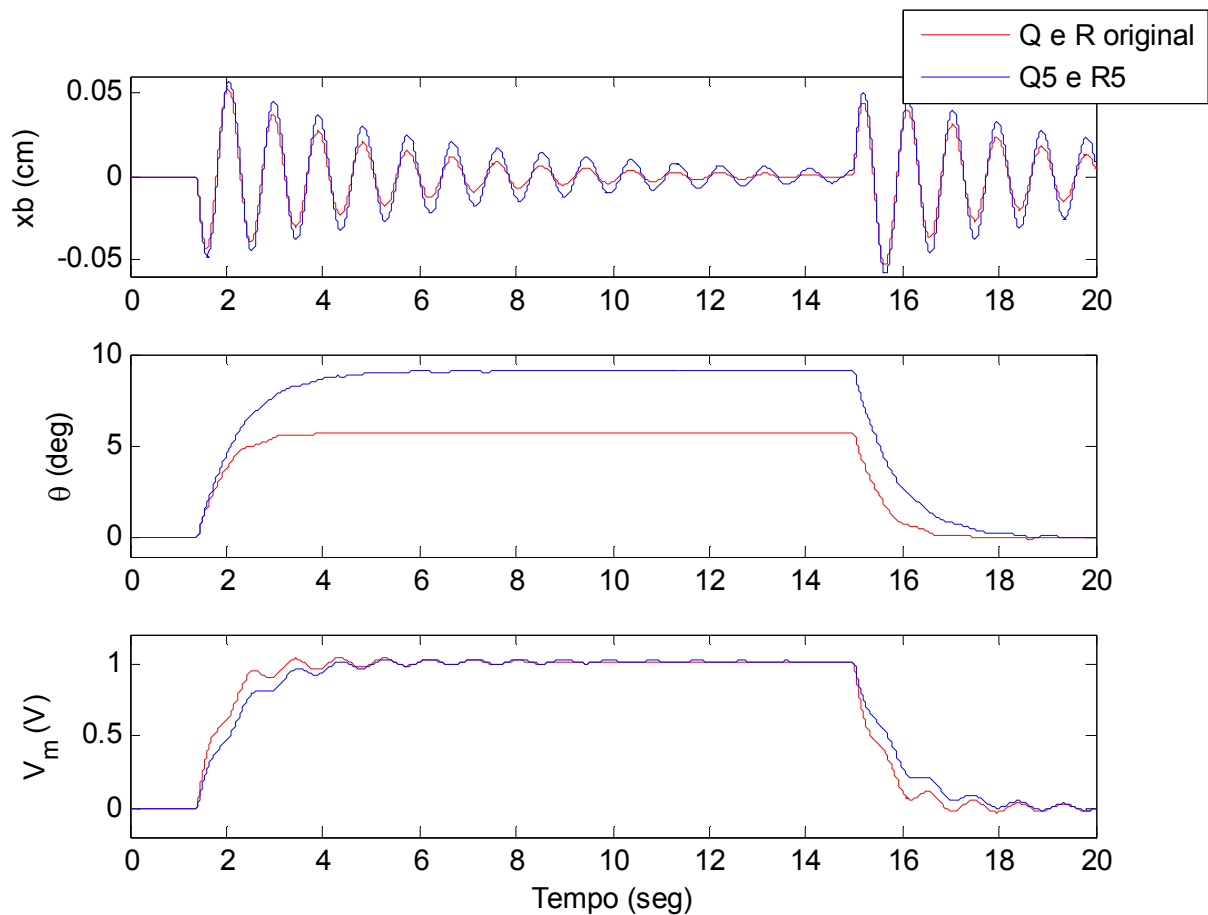


Figura 6.33 - Resposta do sistema a uma acção do tipo degrau unitário para Q5 e R5

Por observação da Figura 6.33, com o aumento do valor de R , verifica-se um aumento do tempo de assentamento de x_b e de θ . No que diz respeito ao esforço de controlo, o aumento do valor de R não implicou uma melhoria considerável na resposta do sistema.

Caso 6

Alterando, agora, o valor de Q_1 e Q_2 simultaneamente para os que foram utilizados nos casos 2 e 3, respectivamente, e alterando o valor de R para 20,

$$Q_6 = \begin{bmatrix} 800000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2200 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R_6 = 20$$

$$K_6 = [-192.67 \ 10.56 \ 7.89 \ 0.18]$$

a resposta do sistema vem,

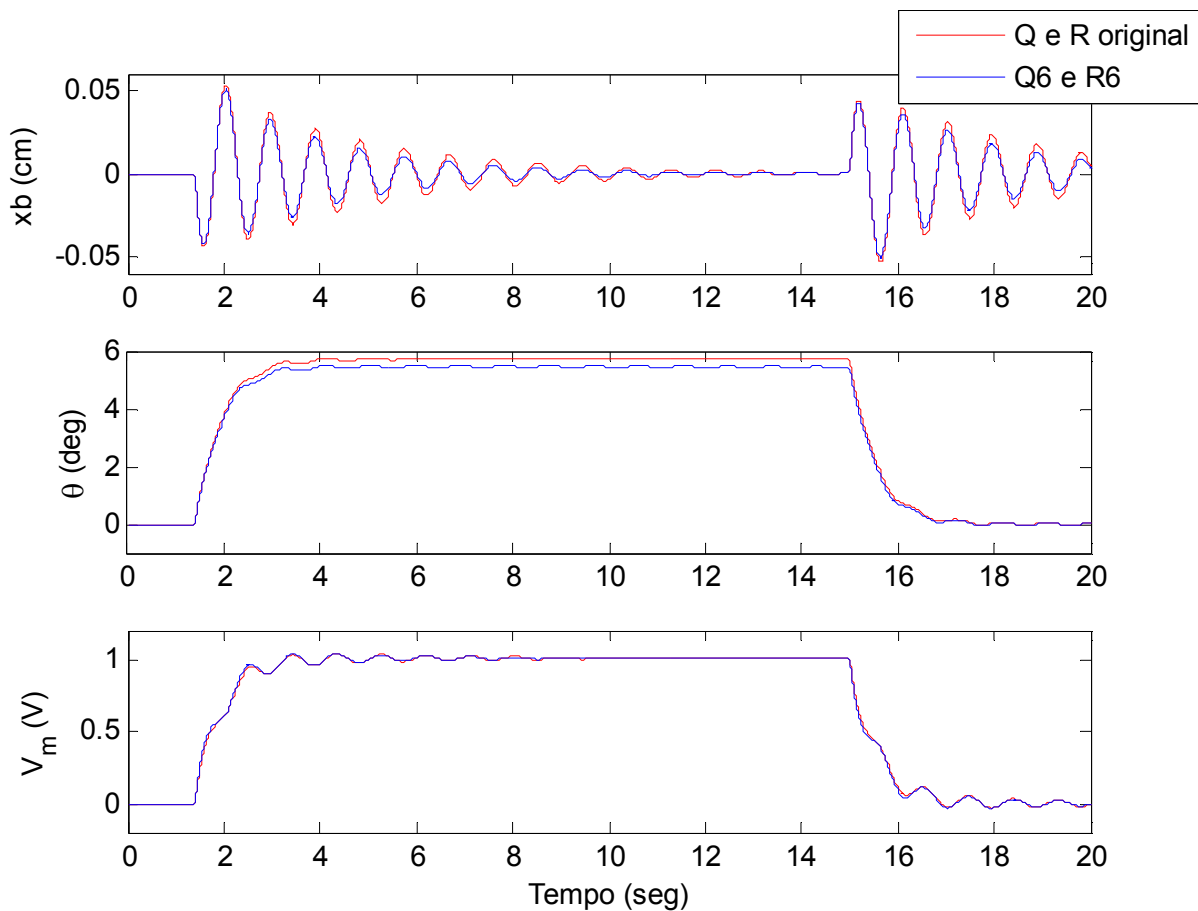


Figura 6.34 - Resposta do sistema a uma acção do tipo degrau unitário para Q_6 e R_6

Ao alterar os valores de Q_1 e Q_2 , simultaneamente, observa-se que o tempo de assentamento de x_b , tal como era esperado, diminui. Contudo, esta combinação de valores não trás melhorias em termos de tempo de assentamento de θ e esforço de controlo.

6.10. APLICAÇÃO EXPERIMENTAL

O equipamento “Smart Structure” possibilita o estudo de um sistema de controlo activo, comportando-se como um AMD.

6.10.1. Montagem Experimental

Os equipamentos utilizados para concretizar os ensaios experimentais foram os seguintes:

- “*Smart Structure*”

O equipamento “Smart Structure”, como já foi apresentado anteriormente, consiste num elemento vertical flexível assente numa base plana, e é constituído pelos componentes apresentados na Figura 6.35.

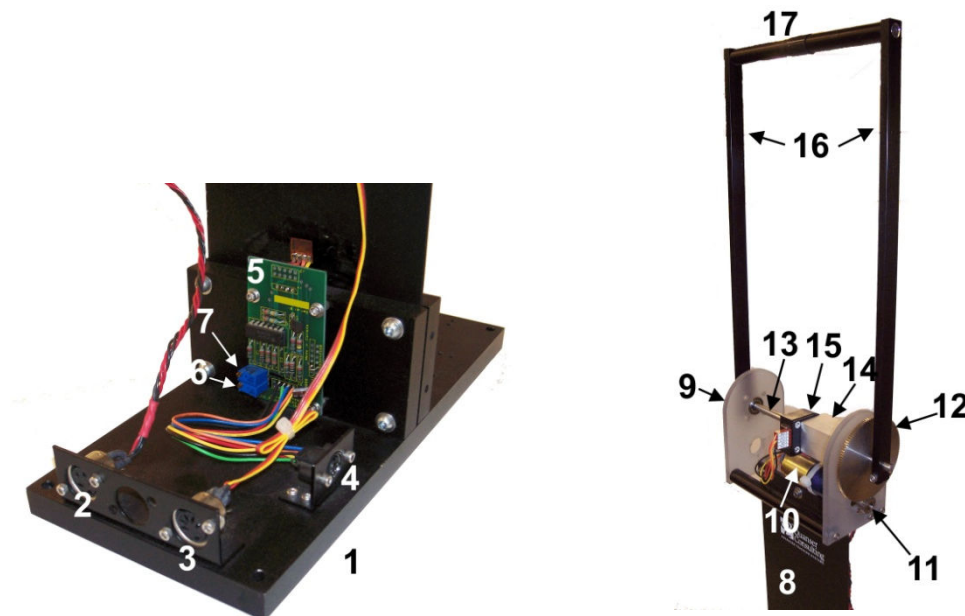


Figura 6.35 - (a) Componentes da base do “Smart Structure”, (b) Componentes do topo do “Smart Structure”

| | | | |
|---|--|----|-------------------------|
| 1 | Base de suporte | 10 | Motor DC |
| 2 | Conector do motor | 11 | Carreto |
| 3 | Conector do codificador | 12 | Roda dentada 120-dentes |
| 4 | Conector do aferidor de tensão | 13 | Eixo de carga |
| 5 | Sensor do aferidor de tensão | 14 | Bloco de rolamentos |
| 6 | Ajuste da calibração do aferidor de tensão | 15 | Codificador |
| 7 | Ajuste do ganho no aferidor de tensão | 16 | Elemento Rígido |
| 8 | Viga flexível | 17 | Viga transversal |
| 9 | Fixação do motor | | |

Descrição dos Componentes do “Smart Structure”

➤ Sensor do aferidor de tensão (5)

Este sensor produz um sinal analógico, que é proporcional à deflexão da extremidade da viga flexível, e é calibrado de forma a que o sensor leia 1 Volt quando essa mesma extremidade sofre um deslocamento de 1 polegada, ou seja, 2,54 cm/V.

A unidade de aferição de tensão foi totalmente calibrada para corrigir as especificações antes da transferência, isto é, lê 1 Volt por 1 polegada de deformação. Contudo, é possível ajustar o potenciômetro de desvio (componente 6), de tal forma que ele leia 0 Volts quando a viga está na posição vertical, ou seja, sem deformação.

➤ Motor DC (10)

O equipamento “Smart Structure” incorpora um motor DC Faulhaber Coreless, modelo 2338S006. É um motor de alta eficiência que pode obter uma resposta muito mais rápida que um motor DC convencional. O motor em si tem uma caixa de conversão interna que permite um rácio de 14:1.

➤ Codificador (15)

O codificador óptico instalado no equipamento “Smart Structure” mede a posição angular do elemento de inércia usando o eixo de carga, componente 13, que atravessa o

bloco de rolamentos, componente 14. Trata-se de um codificador de eixo óptico unilateral US Digital S1 que oferece alta resolução de 4096 contagens por revolução no modo de quadratura (1024 linhas por revolução). O sinal de posição gerado pelo codificador pode ser conectado directamente ao dispositivo de aquisição de dados utilizando, para isso, um cabo DIN standard de 5 pinos.

➤ *Fixação do motor (9)*

A fixação do motor é um chassis que mantém unido o motor DC, o codificador, as engrenagens e o eixo de carga. Quando o motor é actuado faz com que a engrenagem menor, componente 11, rode e faça rodar a engrenagem de 120 pinos, componente 12, acoplada ao eixo de carga, componente 13. O conjunto de engrenagens externo tem um rácio de 5:1. Assim, efectivamente, o motor controla o elemento de inércia através de uma engrenagem com rácio combinado de 70:1.

➤ *Elemento de inércia*

O elemento de inércia é preso ao eixo de carga, componente 13, e consiste em dois elementos rígidos, componente 16, e uma viga transversal, componente 17. O elemento de inércia gira com o eixo de carga quando o motor é accionado.

- ***Amplificador de potência***

Os amplificadores utilizados são os da QUANSER UPM 1503 e UPM 2405.

- ***Controlo Digital***

O controlo digital é conseguido utilizando uma placa de aquisição QUANSER Q8 e o software de controlo em tempo real *WinCon*. O controlador é desenvolvido recorrendo ao SIMULINK e executado em tempo real utilizando o *WinCon*. O código SIMULINK é automaticamente convertido para código C e o software *WinCon* serve de interface para correr directamente o algoritmo de controlo na CPU do computador.

Na colocação em funcionamento do equipamento é necessário equilibrar manualmente o elemento rígido, colocando-a na posição de equilíbrio vertical, de modo a que se possam “zerar” os sensores e, também, como medida de segurança de funcionamento, visto que a força que é gerada pelo motor não é suficiente para erguer esse mesmo elemento.

6.10.2. Resultados Experimentais

Seguidamente representam-se as respostas do sistema obtidas no equipamento “Smart Structure”. Utilizaram-se os valores de Q e R mencionados anteriormente.

O diagrama de blocos da Figura 6.36 representa a implementação em tempo real do sistema controlado e não controlado.

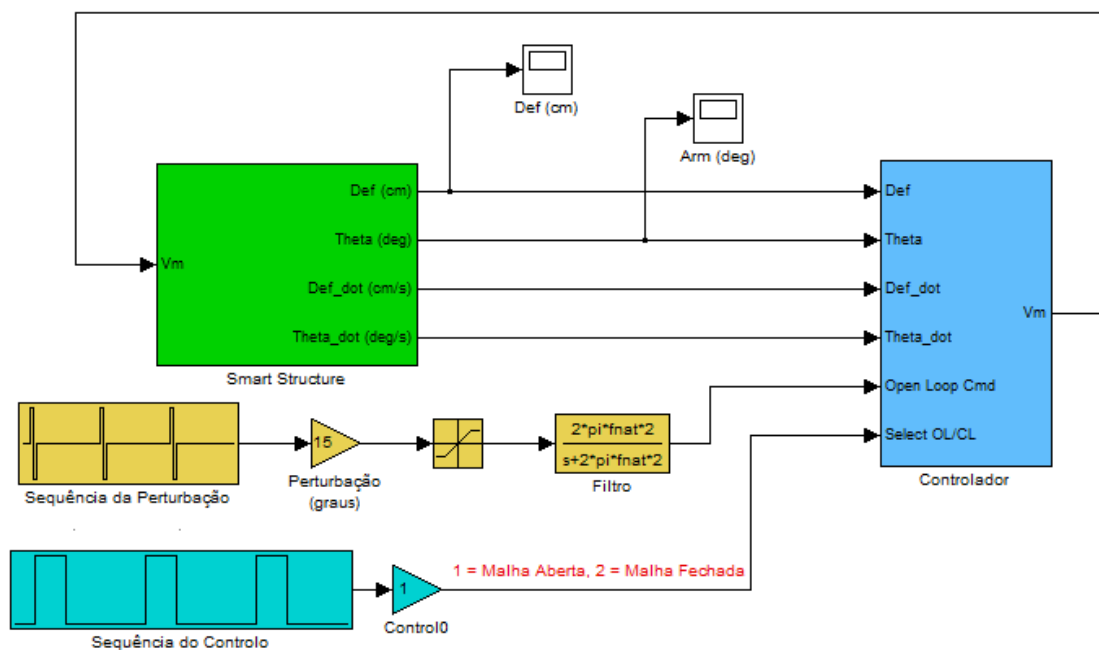


Figura 6.36 - Diagrama de blocos

O bloco “Smart Structure” representa a interface entre o controlador e o equipamento. O bloco “Controlador” implementa o controlo em malha fechada com realimentação total ou parcial dos estados.

A lei de controlo com realimentação total dos estados é

$$u(t) = V_m = -(k_1 x_b + k_2 \theta + k_3 \dot{x}_b + k_4 \dot{\theta}) \quad (6.10.1)$$

A aplicação desta lei não nos dá certezas sobre até onde o elemento flexível irá rodar. Se os ganhos calculados forem demasiado altos, então o elemento rígido poderá sofrer grande rotação de tal forma que poderá colidir com a viga flexível, o que não é desejável.

Reescrevendo a lei de controlo, tem-se

$$V_m = -k_2 \left[\theta - \left(-\frac{k_1}{k_2} x_b - \frac{k_3}{k_2} \dot{x}_b \right) \right] - k_4 \dot{\theta}$$

$$V_m = -k_2(\theta - \theta_d) - k_4 \dot{\theta} \quad (6.10.2)$$

No controlador utilizado estão presentes dois tipos de realimentação: parcial e total. Entende-se aqui por realimentação parcial quando apenas o estado relacionado com o ângulo do elemento rígido, θ , é controlado, e a lei que rege o controlador é dada pela expressão,

$$V_m = k_{p,\theta}(\theta_d - \theta) - k_{d,\theta} \dot{\theta} \quad (6.10.3)$$

Perante este modo de realimentação, o pêndulo pode ser levado a atingir uma posição desejável, θ_d , introduzindo uma perturbação ao equipamento “Smart Structure”. É, particularmente, interessante para mostrar como o sistema se comporta quando não há controlo do estado x_b .

Quando existe realimentação total são controlados ambos os estados, ou seja, x_b e θ . O elemento rígido é levado a permanecer na sua posição vertical e o movimento da extremidade da viga flexível é amortecido. A sua lei é dada por,

$$V_m = -k_{p,x}x_b - k_{p,\theta}\theta - k_{d,x}\dot{x}_b - k_{d,\theta}\dot{\theta} \quad (6.10.4)$$

Para verificar o efeito do controlo e a influência dos parâmetros Q e R efectuaram-se medições da resposta do sistema, em tempo real, quando sujeita à perturbação ilustrada na Figura 6.37.

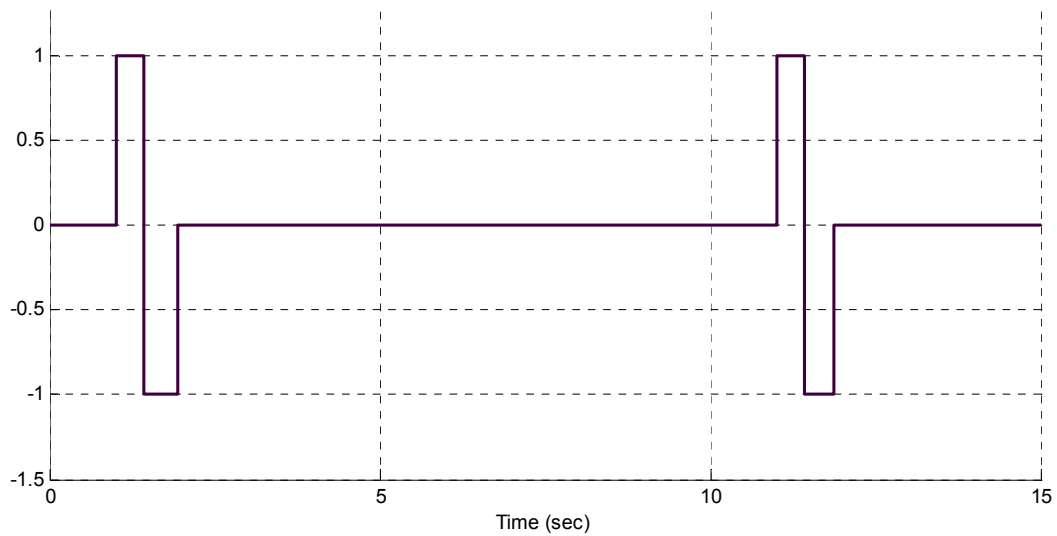


Figura 6.37 - Perturbação imposta ao sistema

Contudo, é de salientar que, apesar da perturbação ilustrada na Figura 6.37 atingir um valor máximo de 1, é aplicada uma intensidade de 15 V, como se pode observar na Figura 6.36.

Nos gráficos apresentados observa-se o comportamento da estrutura perante o sinal de entrada ilustrado na Figura 6.37. O sinal é aplicado em $t = 1$ seg, dando origem à vibração da viga flexível e do elemento rígido. O controlo é, assim, accionado amortecendo essa vibração. O controlo cessa, aproximadamente, em $t = 9$ seg e a perturbação é novamente aplicada ao sistema levando-o, mais uma vez, a oscilar.

Caso 1

$$Q_{orig} = \begin{bmatrix} 250000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R_{orig} = 10$$

$$K = [-153.21 \ 10.07 \ 6.00 \ 0.14]$$

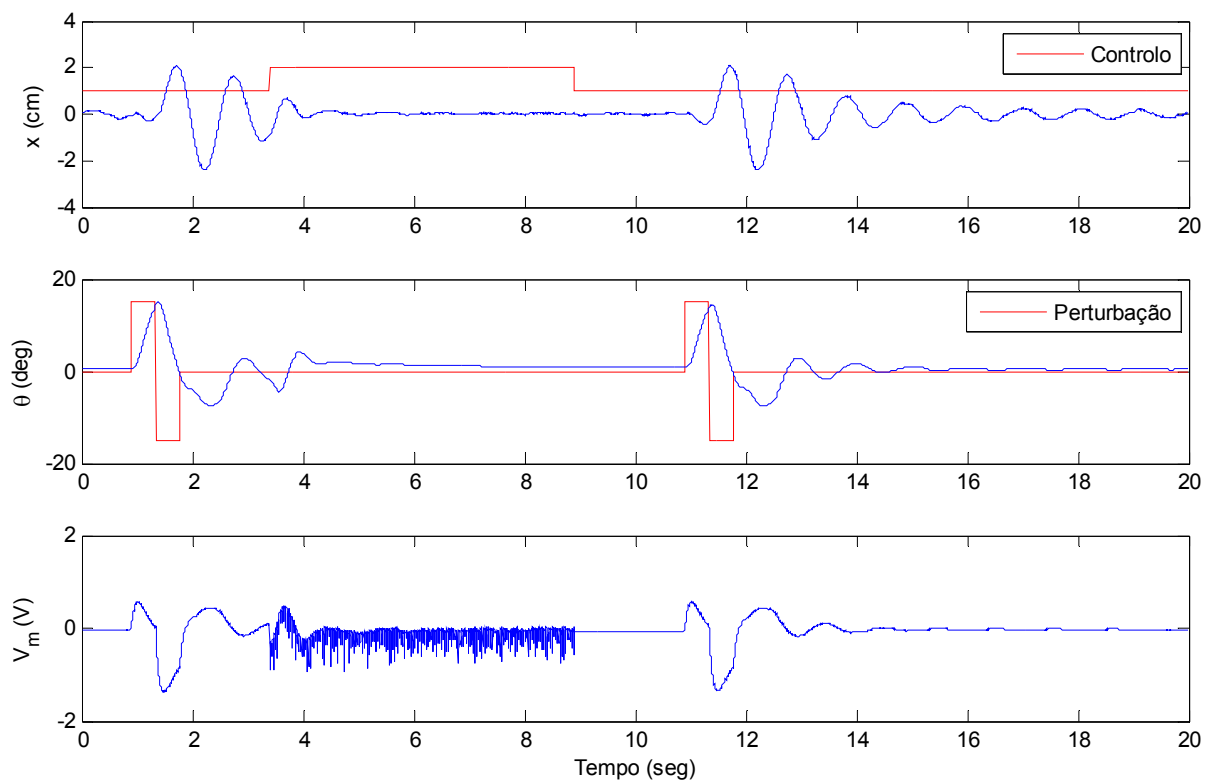


Figura 6.38 - Resposta do sistema para Q_{orig} e R_{orig} medida directamente do equipamento

Observa-se, entre $t = 3,5$ seg e $t = 8,5$ seg, um considerável esforço de controlo que leva à redução do deslocamento da extremidade da viga flexível. A partir de $t = 8,5$ seg, quando o controlo deixa de actuar (comportamento em malha aberta), e é aplicada uma nova perturbação, há um pico no esforço de controlo que, a partir desse ponto, irá tender para zero.

Este comportamento verifica-se para todos os valores de Q e R apresentados a seguir.

Caso 2

$$Q2 = \begin{bmatrix} 800000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R2 = 10$$

$$K2 = [-273.62 \ 10.07 \ 10.60 \ 0.24]$$

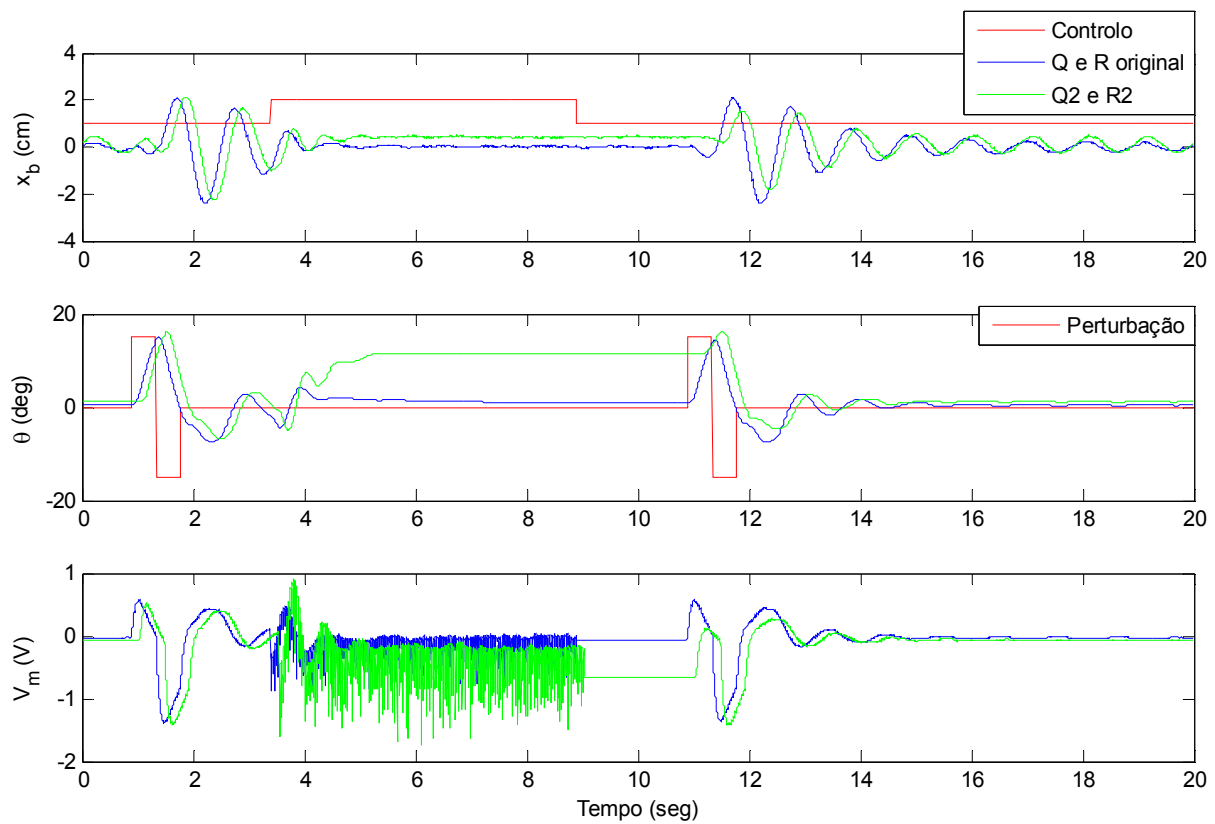


Figura 6.39 - Resposta do sistema para Q_2 e R_2 medida directamente do equipamento

O aumento do valor de Q_1 para 800000 não se revelou significativo, na prática, para a diminuição do tempo de assentamento de x_b . Observou-se, ainda, um aumento do esforço de controlo na redução do deslocamento da extremidade da viga flexível.

Caso 3

$$Q_3 = \begin{bmatrix} 250000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2200 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R_3 = 10$$

$$K_3 = [-147.48 \ 14.90 \ 8.56 \ 0.20]$$

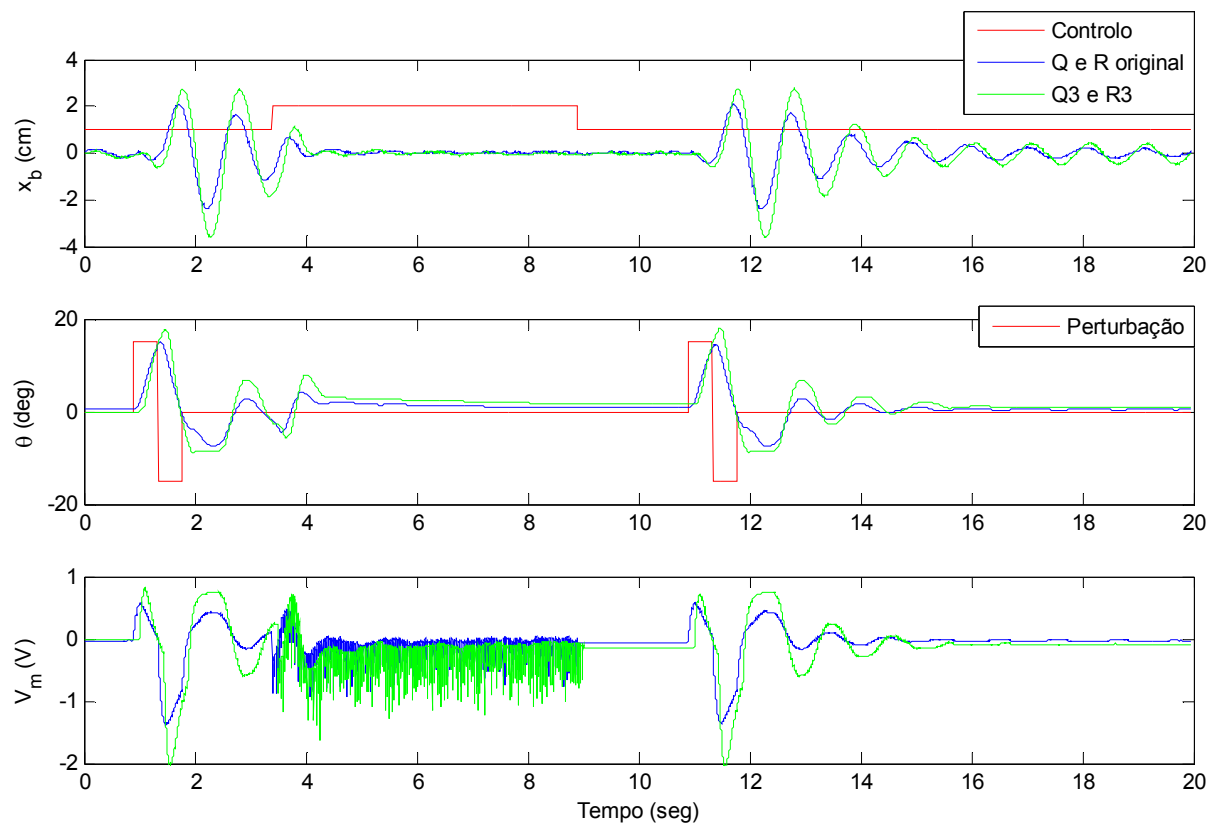


Figura 6.40 - Resposta do sistema para Q_3 e R_3 medida directamente do equipamento

O aumento do valor de Q_2 para 2200 não conduziu, na prática, a alterações significativas dos parâmetros analisados, apenas se tendo verificado um ligeiro aumento do tempo de assentamento de x_b , tal como se previa através da análise da Figura 6.19.

Caso 4

$$Q_4 = \begin{bmatrix} 250000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 200 \end{bmatrix} \quad R_4 = 10$$

$$K_4 = [-155.29 \ 10.07 \ 4.70 \ 1.73]$$

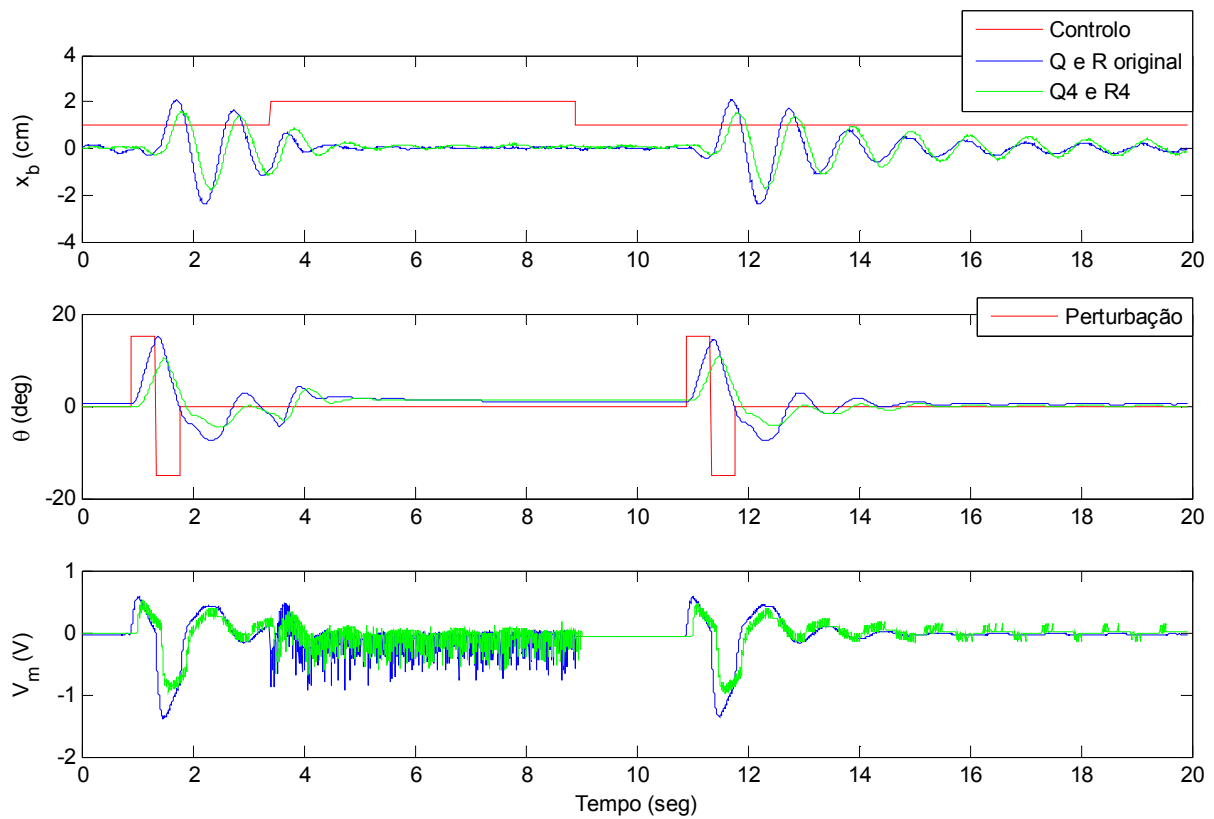


Figura 6.41 - Resposta do sistema para Q_4 e R_4 medida directamente do equipamento

Aumentar o valor de Q_4 levou a uma ligeira diminuição do esforço de controlo e do tempo de assentamento de x_b e não afectou, significativamente, o tempo de assentamento de θ .

Caso 5

$$Q_5 = \begin{bmatrix} 250000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R_5 = 25$$

$$K_5 = [-155.29 \ 10.07 \ 4.70 \ 1.73]$$

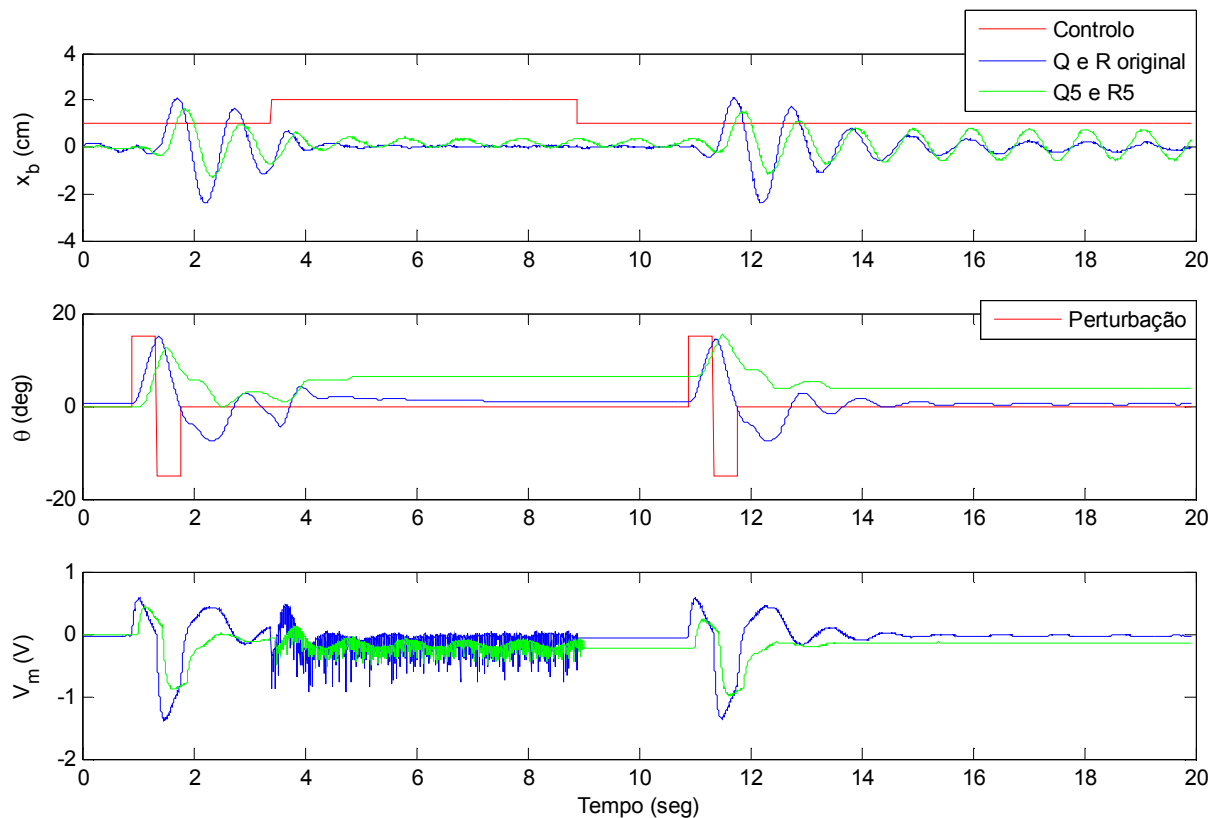


Figura 6.42 - Resposta do sistema para Q_5 e R_5 medida directamente do equipamento

Tal como o previsto, o aumento do valor de R levou a uma redução bastante significativa do esforço de controlo na atenuação da vibração da extremidade da viga flexível e a um aumento do tempo de assentamento de x_b .

Caso 6

$$Q_6 = \begin{bmatrix} 800000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2200 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R_6 = 20$$

$$K_6 = [-192.67 \ 10.56 \ 7.89 \ 0.18]$$

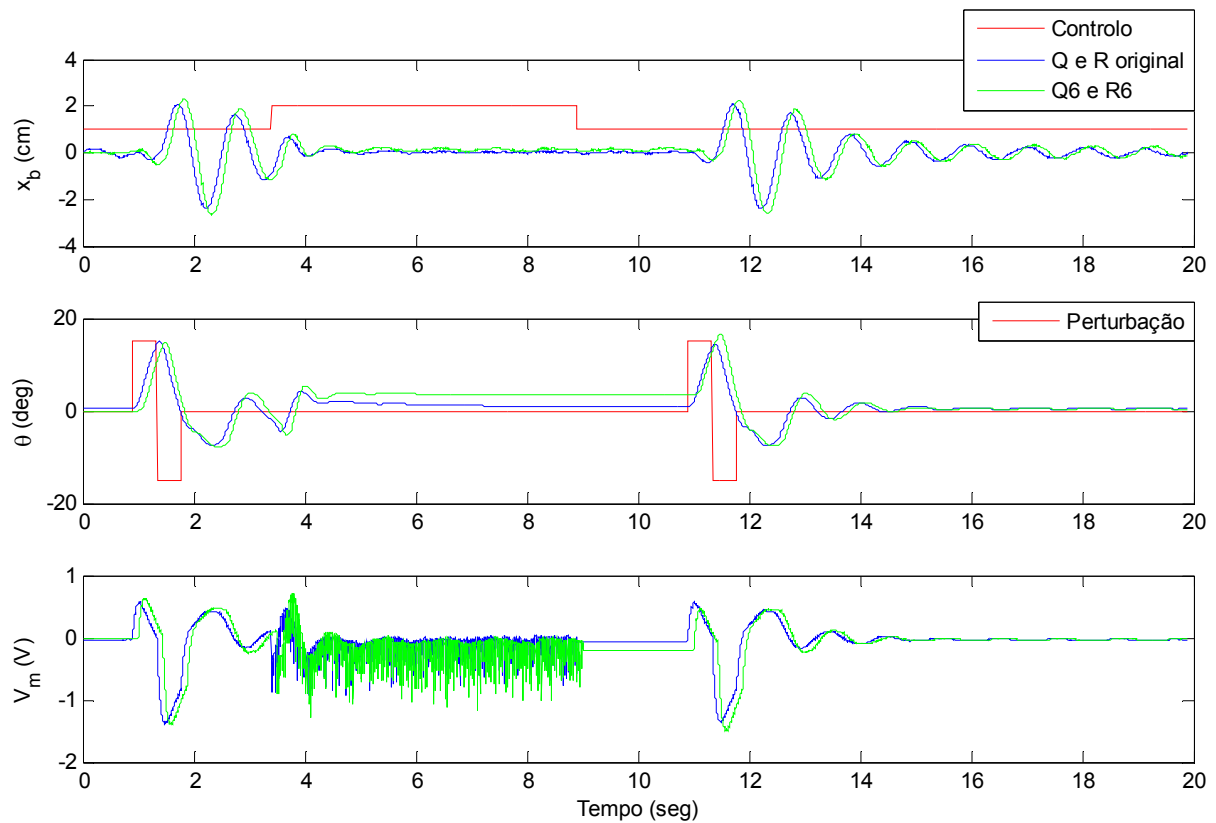


Figura 6.43 - Resposta do sistema para Q_6 e R_6 medida directamente do equipamento

Ao combinar os valores utilizados nos ensaios anteriores não se obtiveram as melhorias desejadas na resposta do sistema. Este facto pode estar relacionado com uma má escolha dos valores utilizados e com o facto de, na análise do comportamento do sistema através das simulações em MATLAB, não se ter tido em conta todos os factores presentes nos ensaios laboratoriais. É de salientar, ainda, o facto de as matrizes Q_{orig} e R_{orig} , utilizadas como ponto de partida, já serem matrizes optimizadas, e dificilmente se conseguir atingir melhores resultados do que os obtidos com estes valores.

Sendo o objectivo proposto diminuir o tempo de assentamento de x_b ao mesmo tempo que se reduz o esforço de controlo e sabendo, por análise das conclusões anteriores, que o incremento dos valores de $Q(2,2)$ e $Q(4,4)$ não traz melhorias significativas na resposta do sistema, seria interessante fazer alguns ensaios encontrando um equilíbrio apenas entre os valores de $Q(1,1)$ e $R(1,1)$.

Capítulo 7

Considerações Finais

Por ser uma área demasiado vasta, e que engloba muitos temas (alguns com bastante complexidade), é impossível abordar neste tipo de trabalho tudo o que esteja relacionado com o controlo de vibrações. Assim, tentou-se de forma sucinta reunir alguma informação importante para a percepção deste tema, aplicando o que foi estudado a um caso em concreto.

No que se refere à parte prática da presente dissertação, esta permitiu a compreensão dos princípios básicos de funcionamento de um controlador baseado na técnica de um Regulador Linear Quadrático (Linear Quadratic Regulator - LQR) com realimentação de estados e o ajuste dos parâmetros Q e R para as exigências pré-definidas.

Os resultados obtidos ao longo deste estudo mostram que a técnica de controlo óptimo LQR por realimentação de estados no domínio do tempo é eficiente, fácil de ser implementada, garante estabilidade e uma boa rejeição da perturbação. A sua maior dificuldade consiste em determinar as matrizes de ponderação Q e R que mais de adequam aos objectivos pretendidos, sendo este um processo exaustivo e bastante moroso. Ultrapassado esse obstáculo, a sua implementação é simples e, normalmente, cumpre os objectivos propostos.

É possível recorrer a um controlador do tipo LQR quando se tem como ponto de partida as mais variadas estratégias de controlo, tal como a limitação dos valores dos deslocamentos máximos, das velocidades máximas, do tempo que a estrutura demora a atingir um determinado intervalo de oscilação ou até mesmo os valores dos ganhos

envolvidos no processo. Contudo, o mais usual em estruturas de Engenharia Civil é actuar ao nível do amortecimento.

Porém, este tipo de controlo não é o mais interessante do ponto de vista estrutural pois, apesar de se enquadrar no grupo do controlo óptimo, fornece apenas uma solução matemática para o problema, não conduzindo a valores verdadeiramente óptimos. Na prática, a combinação escolhida para as matrizes de ponderação Q e R levarão, com maior ou menor dificuldade, aos objectivos inicialmente propostos. Contudo, o facto de se ensaiar um conjunto alargado de matrizes de ponderação, por tentativa e erro, não garante que os valores escolhidos para Q e R conduzam à solução ideal.

Assim, quando o objectivo que se pretende atingir tem como base a imposição de valores concretos para as características dinâmicas da estrutura, é mais sensato optar-se por outros tipos de controladores como, por exemplo, o método do lugar das raízes ou o método da alocação de pólos, em detrimento dos métodos de optimização.

ANEXOS

Anexo I

Estimativa da Rigidez da Barra Flexível Utilizando Transformadas de Laplace

O valor da rigidez da barra flexível já é conhecido à partida, no entanto, caso fosse necessário a sua determinação, o procedimento a adoptar seria o a seguir demonstrado.

Para estimar a rigidez da barra flexível é necessário encontrar a solução da equação diferencial que rege o comportamento do sistema. Sendo a resolução deste tipo de problemas bastante trabalhosa e, por vezes, com soluções bastante difíceis de obter, é vantajoso recorrer à definição de Transformada de Laplace.

Considerando apenas o modelo não actuado do elemento flexível, Figura I-1, onde se considera que a massa total está concentrada ao nível do motor,

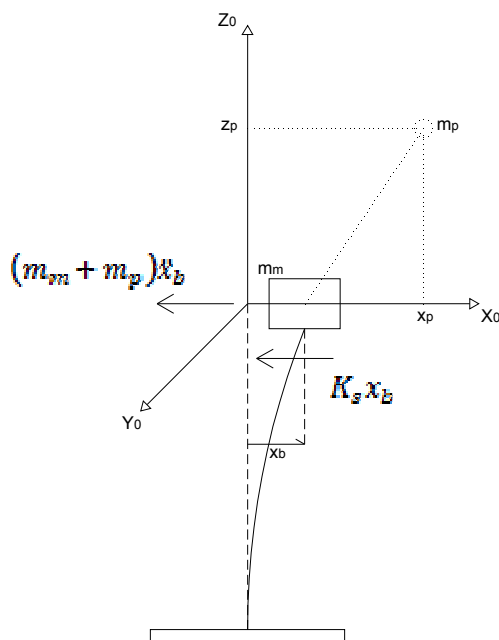


Figura I-1 - Diagrama de corpo livre do modelo não actuado

a expressão que rege o seu comportamento é,

$$K_s x_b(t) + (m_m + m_p) \left(\frac{d^2}{dt^2} x_b(t) \right) = 0 \quad (\text{I.1})$$

Aplicando a definição de Transformada de Laplace e tirando partido da sua linearidade vem,

$$\mathcal{L} \left\{ K_s x_b(t) + (m_m + m_p) \left(\frac{d^2}{dt^2} x_b(t) \right) \right\} = 0$$

$$\mathcal{L}\{K_s x_b(t)\} + \mathcal{L} \left\{ (m_m + m_p) \left(\frac{d^2}{dt^2} x_b(t) \right) \right\} = 0$$

$$K_s \mathcal{L}\{x_b(t)\} + (m_m + m_p) \mathcal{L} \left\{ \left(\frac{d^2}{dt^2} x_b(t) \right) \right\} = 0$$

Recorrendo à expressão (IV.4) para as derivadas,

$$K_s X_b(s) + (m_m + m_p) [s^2 X_b(s) - s x_b(0) - \dot{x}_b(0)] = 0$$

Assumindo velocidade inicial nula, $\dot{x}_b = 0$, e desenvolvendo a igualdade acima,

$$K_s X_b(s) + m_m s^2 X_b(s) - m_m s x_b(0) + m_p s^2 X_b(s) - m_p s x_b(0) = 0$$

$$(K_s + m_m s^2 + m_p s^2) X_b(s) - (m_m + m_p) s x_b(0) = 0$$

Logo, a Transformada de Laplace da função $x_b(t)$, $X_b(s)$, é

$$X_b(s) = \frac{(m_m + m_p) s x_b(0)}{K_s + m_m s^2 + m_p s^2} \quad (\text{I.2})$$

Sabendo que $\mathcal{L}^{-1}\{X_b(s)\} = x_b(t)$,

$$\mathcal{L}^{-1}\{X_b(s)\} = x_b(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{(m_m+m_p)sx_b(0)}{K_s+m_ms^2+m_ps^2}\right)$$

$$x_b(t) = \mathcal{L}^{-1}\left((m_m+m_p)x_b(0)\frac{s}{K_s+(m_m+m_p)s^2}\right) =$$

$$(m_m+m_p)x_b(0) \times \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{K_s+(m_m+m_p)s^2}\right)$$

Dividindo o numerador e o denominador do argumento da transformada inversa por (m_m+m_p) ,

$$x_b(t) = (m_m+m_p)x_b(0) \times \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{\frac{K_s}{(m_m+m_p)}+s^2} \times \frac{1}{(m_m+m_p)}\right) =$$

$$x_b(0) \times \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{\frac{K_s}{(m_m+m_p)}+s^2}\right)$$

Sabe-se, recorrendo a tabelas (ver Anexo III), que

$$\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

Logo,

$$x_b(t) = x_b(0) \times \cos\left(\sqrt{\frac{K_s}{(m_m+m_p)}}t\right) \quad (\text{I.3})$$

Da equação (I.3) conclui-se que a frequência natural é,

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_s}{(m_m+m_p)}} \quad (\text{I.4})$$

A rigidez pode então ser calculada a partir da determinação experimental desta frequência recorrendo a,

$$\omega_n^2 = \frac{K_s}{(m_m + m_p)} \Leftrightarrow K_s = \omega_n^2 (m_m + m_p) \quad (\text{I.5})$$

Anexo II

Cálculo das Equações de Estado

Por (6.3.1),

$$m_p l_p \ddot{x}_b - \frac{J_p K_s}{m_p l_p} x_b - K_s l_p x_b - \frac{m_m J_p}{m_p l_p} \ddot{x}_b - m_m \ddot{x}_b l_p - \frac{J_p}{l_p} \ddot{x}_b - \ddot{x}_b l_p m_p - m_p g \theta l_p = -\frac{k_g^2 k_m^2}{R_m} \dot{\theta} + \frac{k_m k_g}{R_m} V_m$$

$$\left(-\frac{m_m J_p}{m_p l_p} - m_m l_p - \frac{J_p}{l_p} \right) \ddot{x}_b + \left(-\frac{J_p K_s}{m_p l_p} - K_s l_p \right) x_b - m_p g \theta l_p = -\frac{k_g^2 k_m^2}{R_m} \dot{\theta} + \frac{k_m k_g}{R_m} V_m$$

$$\left(-\frac{m_m J_p}{m_p l_p} - m_m l_p - \frac{J_p}{l_p} \right) \ddot{x}_b = \left(\frac{J_p K_s}{m_p l_p} + K_s l_p \right) x_b + m_p g \theta l_p - \frac{k_g^2 k_m^2}{R_m} \dot{\theta} + \frac{k_m k_g}{R_m} V_m$$

$$\begin{aligned} \ddot{x}_b = & \left(-\frac{(J_p + m_p l_p^2) K_s}{m_m (J_p + m_p l_p^2) + m_p J_p} \right) x_b + \left(-\frac{g l_p^2 m_p^2}{m_m (J_p + m_p l_p^2) + m_p J_p} \right) \theta + \\ & + \left(\frac{l_p m_p k_g^2 k_m^2}{R_m (m_m (J_p + m_p l_p^2) + m_p J_p)} \right) \dot{\theta} + \left(-\frac{l_p m_p k_g k_m}{R_m (m_m (J_p + m_p l_p^2) + m_p J_p)} \right) V_m \end{aligned}$$

Por (6.3.2),

$$K_s x_b - \frac{(m_m + m_p)k_g^2 k_m^2}{R_m m_p l_p} \dot{\theta} + \frac{(m_m + m_p)k_g k_m}{R_m m_p l_p} V_m - \frac{(m_m + m_p)(J_p + m_p l_p^2)}{m_p l_p} \ddot{\theta} +$$

$$+ (m_m + m_p)g\theta + m_p l_p \ddot{\theta} = 0$$

$$\left(-\frac{(m_m + m_p)(J_p + m_p l_p^2)}{m_p l_p} + m_p l_p \right) \ddot{\theta} = -K_s x_b + \frac{(m_m + m_p)k_g^2 k_m^2}{R_m m_p l_p} \dot{\theta} - \frac{(m_m + m_p)k_g k_m}{R_m m_p l_p} V_m -$$

$$- (m_m + m_p)g\theta$$

$$\ddot{\theta} = \frac{K_s m_p l_p}{m_m (J_p + m_p l_p^2) + J_p m_p} x_b - \frac{(m_m + m_p)k_g^2 k_m^2}{R_m (m_m (J_p + m_p l_p^2) + J_p m_p)} \dot{\theta} +$$

$$+ \frac{(m_m + m_p)k_g k_m}{R_m (m_m (J_p + m_p l_p^2) + J_p m_p)} V_m + \frac{(m_m + m_p)g m_p l_p}{m_m (J_p + m_p l_p^2) + J_p m_p} \theta$$

Anexo III

Transformadas de Laplace

| | |
|----------------------------------|---|
| 1 | $\frac{1}{s}$ |
| e^{at} | $\frac{1}{s-a}$ |
| t^n | $\frac{n!}{s^{n+1}}$ |
| $\text{sen } at$ | $\frac{a}{s^2 + a^2}$ |
| $\cos at$ | $\frac{s}{s^2 + a^2}$ |
| $\text{senh } at$ | $\frac{a}{s^2 - a^2}$ |
| $\cosh at$ | $\frac{s}{s^2 - a^2}$ |
| $e^{at} \text{sen } bt$ | $\frac{b}{(s-a)^2 + b^2}$ |
| $e^{at} \cos bt$ | $\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}$ |
| $t^n e^{at}$ | $\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$ |
| $U_c(t)$ | $\frac{e^{-cs}}{s}$ |
| $U_c(t)f(t-c)$ | $e^{-cs}F(s)$ |
| $e^{ct}f(t)$ | $F(s-c)$ |
| $f(ct)$ | $\frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right)$ |
| $\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$ | $F(s)G(s)$ |
| $\delta(t-c)$ | e^{-cs} |
| $f^{(n)}(t)$ | $s^n F(s) - s^{(n-1)}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$ |
| $(-t)^n f(t)$ | $F^{(n)}(s)$ |

Anexo IV

Propriedades da Transformada de Laplace

- *Linearidade*

Sejam duas funções, $g(t)$ e $h(t)$, cujas Transformadas de Laplace existam e a e b duas constantes quaisquer, então

$$\mathcal{L}\{ag(t) + bh(t)\} = a\mathcal{L}\{g(t)\} + b\mathcal{L}\{h(t)\} \quad (\text{IV.1})$$

Assim como a Transformada de Laplace, a Transformada Inversa também goza desta propriedade.

- *Derivação*

Seja $f(t)$ uma função contínua para $t \geq 0$, cuja Transformada de Laplace exista e tenha como derivada $f'(t)$, sendo esta parcialmente contínua sobre qualquer intervalo finito situado em $t \geq 0$. Então, a Transformada de Laplace de $f'(t)$ existe e pode ser obtida através da integração por partes do integral, $\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt &= \left[f(t) \frac{e^{-st}}{-s} \right]_{t=0}^\infty - \int_0^\infty \left[\frac{d}{dt} f(t) \right] \frac{e^{-st}}{-s} dt = \\ &= \frac{f(0)}{s} + \frac{1}{s} \mathcal{L} \left\{ \frac{d}{dt} f(t) \right\} \end{aligned} \quad (\text{IV.2})$$

Logo,

$$\mathcal{L}\{f'\} = sF(s) - f(0) \quad (\text{IV.3})$$

Do mesmo modo, é possível obter a Transformada de Laplace das seguintes derivadas,

$$\mathcal{L}\{f''\} = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$$

$$\mathcal{L}\{f'''\} = s^3 F(s) - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0)$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{L}\{f^n\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - s^{n-3} f''(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \quad (\text{IV.4})$$

A Transformada de Laplace possui inúmeras outras propriedades, no entanto estas não serão referidas neste trabalho por não serem necessárias na abordagem do problema em questão.

Anexo V

Transformada Inversa de Laplace

A Transformada Inversa de Laplace pode ser obtida por consulta de tabelas, contudo, é necessário que as expressões estejam na forma de fracções parciais.

- *Decomposição em Fracções Parciais*

Muitas vezes, a Transformada de Laplace é expressa na forma

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

onde $A(s)$ e $B(s)$ são polinómios em s , e o grau de $B(s)$ é menor que o de $A(s)$. Se esta última condição não se verificar é conveniente dividir o numerador pelo denominador, resultando numa expressão na forma,

$$F(s) = \frac{R(s)}{A(s)} + Q(s)$$

Sendo $R(s)$ o resto da divisão de $B(s)$ por $A(s)$ e cujo grau é menor que o grau de $A(s)$.

Se $F(s)$ puder ser escrita numa soma de parcelas,

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s) + \cdots + F_n(s)$$

e se a Transformada Inversa de Laplace de cada uma dessas parcelas existir, então,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\} + \mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\} + \cdots + \mathcal{L}^{-1}\{F_n(s)\} = \\ &= f_1(t) + f_2(t) + \cdots + f_n(t) \quad (\text{V.1})\end{aligned}$$

Para ser possível utilizar este método de decomposição de funções em fracções parciais, é fundamental saber, previamente, quais são os pólos de $F(s)$. Entende-se por pólos os valores de s tal que $|F(s)| = \infty$. Estes podem ser reais distintos, reais múltiplos ou complexos conjugados.

No caso de:

- Pólos reais distintos

Quando a função $F(s)$ apresentar pólos reais distintos, esta pode ser expressa como

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{A_1}{s + p_1} + \frac{A_2}{s + p_2} + \dots + \frac{A_n}{s + p_n} \quad (\text{V.2})$$

onde A_k ($k = 1, 2, \dots, n$) são constantes. O coeficiente A_k é chamado de *resíduo* do pólo correspondente p_k . O valor de A_k pode ser obtido [17] multiplicando ambos os membros da equação por $s + p_k$ e substituindo, depois, por $s = -p_k$ o que irá resultar em

$$A_k = \left[(s + p_k) \frac{B(s)}{A(s)} \right]_{s=-p_k}$$

- Pólos reais múltiplos

Quando a função $F(s)$ tiver pólos reais múltiplos, com multiplicidade $q > 1$, esta pode ser expressa como

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{A_q}{(s + p_i)^q} + \frac{A_{q-1}}{(s + p_i)^{q-1}} + \dots + \frac{A_1}{s + p_i} \quad (\text{V.3})$$

onde as constantes A_q, A_{q-1}, \dots, A_1 podem ser calculadas como se segue

$$A_l = \frac{1}{(q-l)!} \left\{ \frac{d^{q-l}}{ds^{q-l}} \left[(s-p_i)^q \frac{B(s)}{A(s)} \right] \right\}_{s=p_i}$$

No caso de a função $F(s)$ apresentar simultaneamente os dois tipos de pólos tratados anteriormente, a expansão em fracções parciais será uma combinação dos dois processos considerados.

- Pólos complexos conjugados

No caso de os pólos serem complexos conjugados, a expressão para pólos reais distintos pode ser utilizada, sendo necessário apenas isolar os resíduos em fracções separadas do tipo

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{A_1}{s - \alpha - j\beta} + \frac{A_2}{s - \alpha + j\beta} \quad (\text{V.4})$$

onde A_1 e A_2 são constantes complexas conjugadas. Note-se que $A_2 = \overline{A_1}$ logo, apenas uma das constantes precisa ser calculada.

Aplicando a Transformada de Laplace a cada um dos termos da equação (2.3.1) tem-se

$$(s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n) Y(s) = (b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m) U(s) \quad (\text{V.5})$$

Define-se,

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (\text{V.6})$$

Esta função, chamada Função de Transferência, depende apenas das constantes a_i ($i = 1, 2, \dots, n$) e b_j ($j = 1, 2, \dots, m$) que, por sua vez, só dependem das

características mecânicas e materiais do sistema, ou seja, da massa, rigidez e amortecimento.

No sistema em estudo as Funções de Transferência são, respectivamente,

$$G_1(s) = \frac{X_b(s)}{U(s)} \quad (\text{V.7})$$

$$G_2(s) = \frac{\theta(s)}{U(s)} \quad (\text{V.8})$$

Assim, as raízes de $U(s) = 0$, ou seja, os valores de s para os quais o denominador da Função de Transferência se anula, designam-se *pólos*. Por outro lado, os valores de s para os quais $Y(s) = 0$ são chamados de *zeros* da Função de Transferência.

Quando os pólos e os zeros da Função de Transferência são conhecidos, pode-se reescrever a função $G(s)$ como se segue

$$G(s) = K \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} \quad (\text{V.9})$$

onde K é uma constante e p_i ($i = 1, 2, \dots, n$) e z_j ($j = 1, 2, \dots, m$) são os pólos e zeros da Função de Transferência, respectivamente.

Note-se que os zeros e os pólos podem ser de multiplicidade 1 ou superior, sendo, no primeiro caso, chamados de simples ou distintos e, no segundo caso, chamados de múltiplos ou repetidos.

Assim, tendo obtido as expressões na forma de fracções parciais, é possível recorrer a tabelas para determinar a Transformada Inversa de Laplace.

Anexo VI

Funções de Transferência Analíticas

Partindo das seguintes equações linearizadas do movimento,

$$K_s x_b + (m_m + m_p) \ddot{x}_b + m_p l_p \ddot{\theta} = 0 \quad (\text{VI.1})$$

$$m_p l_p \ddot{x}_b + (J_p + m_p l_p^2) \ddot{\theta} - m_p g \theta l_p = -\frac{k_m^2 k_g^2}{R_m} \dot{\theta} + \frac{k_m k_g}{R_m} V_m \quad (\text{VI.2})$$

Aplicando a Transformada de Laplace à equação (VI.1)

$$\begin{aligned} K_s X_b(s) + (m_m + m_p) s^2 X_b(s) + m_p l_p s^2 \theta(s) &= 0 \\ [K_s + (m_m + m_p) s^2] X_b(s) + m_p l_p s^2 \theta(s) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{VI.3})$$

E à equação (VI.2)

$$\begin{aligned} m_p l_p s^2 X_b(s) + (J_p + m_p l_p^2) s^2 \theta(s) - m_p g l_p \theta(s) + \frac{k_m^2 k_g^2}{R_m} s \theta(s) &= \\ &= \frac{k_m k_g}{R_m} U(s) \end{aligned} \quad (\text{VI.4})$$

Resolvendo a equação (VI.3) em ordem a $X_b(s)$

$$X_b(s) = -\frac{m_p l_p s^2}{K_s + (m_m + m_p) s^2} \theta(s) \quad (\text{VI.5})$$

E em ordem a $\theta(s)$

$$\theta(s) = -\frac{[K_s + (m_m + m_p) s^2]}{m_p l_p s^2} X_b(s) \quad (\text{VI.6})$$

Substituindo (VI.6) na equação (VI.4), vem

$$\begin{aligned} m_p l_p s^2 X_b(s) + (J_p + m_p l_p^2) s^2 \left[-\frac{[K_s + (m_m + m_p) s^2]}{m_p l_p s^2} X_b(s) \right] - m_p g l_p \left[-\frac{[K_s + (m_m + m_p) s^2]}{m_p l_p s^2} X_b(s) \right] + \\ + \frac{k_m^2 k_g^2}{R_m} s \left[-\frac{[K_s + (m_m + m_p) s^2]}{m_p l_p s^2} X_b(s) \right] = \frac{k_m k_g}{R_m} U(s) \end{aligned}$$

Onde

$$C_1 = \frac{k_m k_g}{R_m}$$

$$C_2 = \frac{k_m^2 k_g^2}{R_m}$$

Colocando $X_b(s)$ em evidência, tem-se

$$\begin{aligned} - \frac{\left[(J_p(m_m + m_p) + l_p^2 m_m m_p) + C_2(m_m + m_p) s^3 + ((J_p + l_p^2 m_p) K_s - g l_p(m_m + m_p) m_p) s^2 \right]}{m_p l_p s^2} X_b(s) - \\ - \frac{[C_2 K_s s - g K_s l_p m_p]}{m_p l_p s^2} X_b(s) = C_1 U(s) \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{X_b(s)}{U(s)} = - (C_1 m_p l_p s^2) \times$$

$$\times \left[\left(J_p (m_m + m_p) + l_p^2 m_m m_p \right) s^4 + C_2 (m_m + m_p) s^3 + \left((J_p + l_p^2 m_p) K_s - g l_p (m_m + m_p) m_p \right) s^2 + \right.$$

$$\left. + C_2 K_s s - g K_s l_p m_p \right]^{-1}$$

Substituindo, agora, (VI.5) na equação (VI.4), vem

$$-\frac{m_p^2 l_p^2 s^4}{K_s + (m_m + m_p) s^2} \theta(s) + (J_p + m_p l_p^2) s^2 \theta(s) - m_p g l_p \theta(s) + \frac{k_m^2 k_g^2}{R_m} s \theta(s) = \frac{k_m k_g}{R_m} U(s)$$

Colocando $\theta(s)$ em evidência, tem-se

$$\left[-\frac{m_p^2 l_p^2 s^4}{K_s + (m_m + m_p) s^2} + (J_p + m_p l_p^2) s^2 - m_p g l_p + C_2 s \right] \theta(s) = C_1 U(s)$$

Logo,

$$\frac{\theta(s)}{U(s)} = - \left(C_1 K_s + C_1 (m_m + m_p) s^2 \right) \times$$

$$\times \left[\left(J_p (m_m + m_p) + l_p^2 m_m m_p \right) s^4 + C_2 (m_m + m_p) s^3 + \left((J_p + l_p^2 m_p) K_s - g l_p (m_m + m_p) m_p \right) s^2 + \right.$$

$$\left. + C_2 K_s s - g K_s l_p m_p \right]^{-1}$$

Assim, as Funções de Transferência do sistema, obtidas analiticamente são

$$\begin{aligned}
\frac{X_b(s)}{U(s)} = & - (C_1 m_p l_p s^2) \times \\
& \times \left[\left(J_p (m_m + m_p) + l_p^2 m_m m_p \right) s^4 + C_2 (m_m + m_p) s^3 + \right. \\
& \left. + \left((J_p + l_p^2 m_p) K_s - g l_p (m_m + m_p) m_p \right) s^2 + C_2 K_s s - g K_s l_p m_p \right]^{-1}
\end{aligned} \tag{VI.7}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\theta(s)}{U(s)} = & - \left(C_1 K_s + C_1 (m_m + m_p) s^2 \right) \times \\
& \times \left[\left(J_p (m_m + m_p) + l_p^2 m_m m_p \right) s^4 + C_2 (m_m + m_p) s^3 + \right. \\
& \left. + \left((J_p + l_p^2 m_p) K_s - g l_p (m_m + m_p) m_p \right) s^2 + C_2 K_s s - g K_s l_p m_p \right]^{-1}
\end{aligned} \tag{VI.8}$$

Anexo VII

Rotinas em MATLAB

Os dados para o sistema em estudo são:

```
% Resistência da armadura do motor
Rm = 2.6          % em  $\Omega$ 
% Constante back-emf
Km = 0,0767      % em V/(rad/s)
% Total gearbox ratio
Kg = 70
% Massa da viga transversal
mp = 0.050       % em kg
% Comprimento da viga transversal
Lp = 0.15        % em m
% Comprimento do elemento rígido
lp = 0.0285      % em m
% Momento de inércia do elemento rígido
Jp = 0,0039      % em kg.m2
% Massa do motor e da fixação
mm = 0,60        % em kg
% Massa da viga flexível
mb = 0.072       % em kg
% Comprimento da viga flexível
Lb = 0.44        % em m
% Momento de inércia da viga flexível
Jb = 0,039       % em kg.m2
% Rigidez da viga flexível
Ks = 30,0        % em N.m
% Gravidade
g=9.81          % em m/s2
```

➤ Representação do sistema em Espaço de Estado, no domínio contínuo

```
c3 = (mp*lp^2*mm+Jp*mp+Jp*mm);
Ac = zeros(4,4);
Ac(1,3) = 1;
```

```

Ac(2,4) = 1;
Ac(3,1) = -(mp*lp^2+ Jp)*Ks/c3;
Ac(3,2) = -mp^2*g*lp^2/c3;
Ac(3,4) = mp*lp*km^2*kg^2/c3/Rm;
Ac(4,1) = mp*lp*Ks/c3;
Ac(4,2) = mp*lp*g*(mm+mp)/c3;
Ac(4,4) = -km^2*kg^2*(mm+mp)/c3/Rm;
Bc = [0; 0; -kg*km*mp*lp/c3/Rm; kg*km*(mm+mp)/c3/Rm];
C = [1 0 0 0; 0 1 0 0];
D = [0; 0];

```

- Cálculo da resposta do sistema (modelo linear e não linear) para uma acção do tipo degrau

```

% Intervalo de tempo a estudar
to = 0;   Tf = 20;
% Admitindo condições iniciais nulas
x0 = [0.0 0.0 0 0]';   tol = 1.0e-6;
options = odeset('RelTol',tol); % a função odeset permite
ajustar os parâmetros de integração que vão ser utilizados
na função ode23
% Equações de estado do modelo não linear descrito no
ficheiro nonlinEOM_PM.m file
[tnl1,xnl1] = ode23('nonlinEOM_PM',[to Tf],x0,options); % a
função ode23 resolve problemas de valor inicial para
equações diferenciais ordinárias

% Representação em Espaço de Estado do modelo linear
(desenvolvido analiticamente)
disp('Matrizes Espaço de Estado para o Modelo Linear,
Determinado Analiticamente')
Ac, Bc, C, D

% Determinação da resposta ao degrau do sistema linear
analítico
tl = linspace(to,Tf,500); % a função linspace gera vectores
linearmente espaçados
sysl1 = ss(Ac,Bc,C,D); % a função ss define o modelo Espaço
de Estado do sistema
[y11,tl,x11] = step(sysl1,tl); a função step determina a
resposta do sistema ao degrau

```

```

disp('Comparação das Respostas dos Modelos Linear e Não
Linear')
nfig = nfig+1; figure(nfig);
% Estado xb[cm] para a Solução Linear e Não Linear
subplot(2,1,1),plot(tnl1,100*xnl1(:,1),'g',tl,100*xl1(:,1),
'b-'),grid
title('Posição da Extremidade da Viga Flexível (resposta ao
degrau)')
xlabel('Tempo (seg)'),ylabel('Posição da Viga Flexível
xb(cm)')
legend('Modelo não linear','Modelo linear')
% Estado \theta[rad] para a Solução Linear e Não Linear
subplot(2,1,2),plot(tnl1,xnl1(:,2),'g-',tl,xl1(:,2),'b--
'),grid
title('Ângulo do Elemento Rígido (resposta ao degrau)')
xlabel('Tempo (seg)'),ylabel('Ângulo do Elemento Rígido
\theta(graus)')
legend('Modelo não linear','Modelo linear')

```

➤ Funções de Transferência analíticas

```

z1=C1*(mm+mp)
z2=C1*Ks
z3=-C1*mp*lp
nz1=Jp*mm+Jp*mp+mm*mp*lp^2
nz2= C2*(mm+mp)
nz3=(Jp+lp^2*mp)*Ks-g*lp*(mm+mp)*mp
nz4=Ks*C2
nz5=-Ks*g*mp*lp

C1=km*kg/Rm
C2=km^2*kg^2/Rm

H = [tf([0 z3/nz1 0 0],[1 nz2/nz1 nz3/nz1 nz4/nz1
nz5/nz1]); tf([0 z1/nz1 0 z2/nz1],[1 nz2/nz1 nz3/nz1
nz4/nz1 nz5/nz1])]

```

➤ Funções de Transferência (MATLAB)

```

sysp = ss (Ac,Bc,C,D);
tf(sysp)

```

➤ Pólos do sistema não controlado

```
polos = eig(Ac)
iopzmap(sysp); % a função iopzmap produz o gráfico dos
pólos e zeros de cada par entrada/saída do sistema
```

➤ Matriz de controlabilidade

```
C_control=[Bc Ac*Bc (Ac^2)*Bc (Ac^3)*Bc];
ou
C_control=ctrb(Ac,Bc)
rank_C=rank(C_control); % a função rank calcula a
característica da matriz
```

➤ LQR

```
Q1 = diag([250000, 1000, 50, 0]);
R1 = 10 * diag([1]);
K1 = lqr(Ac, Bc, Q1, R1); % a função lqr devolve o valor
dos ganhos
c_poles = eig(Ac-Bc*K1); % calcula os pólos do sistema
controlado
plot(real(poles),imag(poles),'kx',real(c_poles),imag(c_pole
s),'k.');
```

% produz o gráfico com os pólos originais e os pólos controlados

```
legend('Original', 'Controlado');
grid;
title('Pólos do Sistema');
xlabel('Eixo Real');
ylabel('Eixo Imaginário');
```

➤ Resposta do sistema para condições iniciais

```
% Resposta do sistema controlado para condições iniciais
x0, xb = 2 cm e lei de controlo u = -K*x
sys_cl = ss(Ac-Bc*K1,zeros(4,1), [eye(4); -K1],
zeros(5,1));
x0 = [0.02; 0; 0; 0];
t = 0:0.01:20;
initial(sys_cl,x0);
```

➤ Resposta do sistema a uma perturbação arbitrária

```
disp('Simulação a uma perturbação arbitrária')
```

```
nfig = nfig+1;    figure(nfig);
[y,t,x] = lsim(ss(Ac-Bc*K,Bc,C,D),th_d,t); % a função lsim
simula a resposta do sistema a perturbação arbitrária
y = y';
x = x';
subplot(3,1,1)
plot(t,100*y(1,:))
ylabel('Deslocamento[cm]')
title('Smart Structure: Simulação da resposta à
perturbação')

subplot(3,1,2)
plot(t,th_d, 'b:', t,y(2,:)*K_R2D,'r-'); % onde K_R2D é um
parâmetro de conversão
axis([0 20 -12.5 12.5]);
ylabel('Ângulo (graus)')
legend('Perturbação','\theta')

subplot(3,1,3)
plot(t,-K1*x,'r')
axis([0 20 -5 5]);
ylabel('Esforço de controlo - V_m (V)');
xlabel('Tempo')
```


Anexo VIII

Parâmetros do Sistema

| | | |
|----------|---|--------------------------|
| V_m | Voltagem nominal do motor | 6,0 V |
| R_m | Resistência da armadura do motor | 2,6 Ω |
| k_m | Constante de força electromotriz | 0,0767 V/(rad/s) |
| k_g | Relação de engrenagem da caixa planetária | 70 |
| m_p | Massa da viga transversal | 0,050 kg |
| L_p | Comprimento da viga transversal | 0,15 m |
| m_{rb} | Massa do elemento rígido | 0,072 kg |
| l_p | Comprimento do elemento rígido | 0,0285 m |
| J_p | Momento de inércia do elemento rígido | 0,0039 kg.m ² |
| m_m | Massa do motor e da fixação | 0,60 kg |
| m_b | Massa da viga flexível | 0,072 kg |
| L_b | Comprimento da viga flexível | 0,44 m |
| J_b | Momento de inércia da viga flexível | 0,039 kg.m ² |
| K_s | Rigidez da viga flexível | 30,0 N/m |

Bibliografia

- [1] J. P. Lynch. Active Structural Control Research at Kajima Corporation [Online].
- [2] S.-C. Liu, "Selected Civil Engineering Developments in Japan," *National Science Foundation's*, 2000.
- [3] C. M. R. Moutinho, "Controlo de Vibrações em Estruturas de Engenharia Civil," Doutoramento, Departamento de Engenharia Civil, Universidade do Porto - Faculdade de Engenharia, Porto, 2007.
- [4] B. F. Spencer, Jr. and M. K. Sain, "Controlling buildings: a new frontier in feedback," *Control Systems Magazine, IEEE*, vol. 17, pp. 19-35, 1997.
- [5] J. Lynch, "Overview of Active Structural Control Systems at Kajima Corporation," Department of Civil and Environmental Engineering, Stanford University, California, 1998.
- [6] G. W. Housner, *et al.*, "Structural Control: Past, Present, and Future," *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 123, pp. 897-971, 1997.
- [7] K. Ogata, *Modern Control Engineering* Prentice-Hall International, Inc. ed., 1990.
- [8] N. W. Hagood and A. V. Flotow, "Damping of Structural Vibrations with Piezoelectric Materials and Passive Electrical Networks," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 146, pp. 243-268, 1991.
- [9] B. Selden, *et al.*, "Segmented shape memory alloy actuators using hysteresis loop control," *Smart Materials and Structures*, vol. 15, pp. 642-652, 2006.
- [10] S. Hurlebaus and L. Gaul, "Smart structure dynamics " *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 20, pp. 255-281, 2006.
- [11] F. M. B. Fernandes. (2005) Ligas com Memória de Forma, Características e Aplicações na Engenharia Civil. *Engenharia e Vida*.
- [12] C. Mavroidis, "Development of Advanced Actuators Using Shape Memory Alloys and Electrorheological Fluids," *Research in Nondestructive Evaluation*, vol. 14, pp. 1-32, 2002.

- [13] A. Nishitani and Y. Inoue, "Overview of the application of active/semiactive control to building structures in Japan," *Earthquake engineering & structural dynamics*, vol. 30, pp. 1565-1574, 2001.
- [14] M. Yamamoto, *et al.*, "Practical applications of active mass dampers with hydraulic actuator," *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, vol. 30, pp. 1697-1717, 2001.
- [15] J. A. P. Ferreira, "Hospital da Luz - Um Edifício com Isolamento Sísmico de Base," ed, 2006.
- [16] J. A. P. Ferreira, "Hospital da Luz - 1º Edifício com Isolamento Sísmico, em Portugal," ed.
- [17] K. Ogata, *Modern Control Engineering*: Prentice-Hall, 1990.
- [18] M.-C. Tsai, *et al.*, "State-space Solutions to H^∞ Sampled-Data Control Problems," *Syst. Control Lett.*, vol. 26, pp. 55-63, 1995.
- [19] C. M. Close, *et al.*, *Modeling and Analysis of Dynamic Systems*, 2002.
- [20] D. J. Inman, *Engineering Vibration*, 2008.
- [21] A. E. Bryson and Y.-C. Ho, *Applied Optimal Control: Optimization, Estimation and Control* 1975.
- [22] A. Tewari, *Modern Control Design with MATLAB and SIMULINK*, 2002.
- [23] B. C. Kuo, *Automatic Control Systems*, 2003.
- [24] *Getting Started with MATLAB 7*.
- [25] Quanser, "Modeling and Vibration Control - Smart Structure," in *Laboratory Manual*, ed.
- [26] Quanser, "Smart Structure - User Manual," ed.
- [27] Quanser, "Smart Structure Control," ed: Quanser Consulting.